TEORYJA

RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

O CZĄSTKOWYCH POCHODNYCH RZĘDU I^go^.

ROZPRAWA

NAPISANA PRZEZ

Władysława Zajączkowskiego

DOKTORA FILOZOFIJI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

w celu uzyskania

STOPNIA DOKTORA FILOZOFIJI

w Warszawskiéj Szkole Głównéj.

WARSZAWA.

w Drukarni Gazety Polskiéj.

1867.

TEORYJA

RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

O CZĄSTKOWYCH POCHODNYCH RZĘDU I^{go}.

ROZPRAWA

NAPISANA PRZEZ

Władysława Zajączkowskiego

DOKTORA FILOZOFIJI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

w celu uzyskania

STOPNIA DOKTORA FILOZOFIJI

w Warszawskiéj Szkole Głównéj.

WARSZAWA.

w Drukarni Gazety Polskiéj.

1867.

Дозволено Цензурою

Варшава 21 Апрѣля 1867 г.

WSTĘP.

Jednym z pierwszych gieometrów, którzy się zajmowali równaniami różniczkowemi o cząstkowych pochodnych, był *Euler* [1]). W trzeciéj części jego rachunku całkowego znajdują się bardzo piękne badania w tym względzie; wprawdzie nie podał on żadnéj ogólnéj metody, używając do każdego szczególnego przypadku oddzielnego wybiegu, wszelako był tak szczęśliwy w wynajdowaniu tychże przypadków, że do wypadków, przez niego otrzymanych, nawet dzisiaj nie można wiele dodać.

Pierwszą ogólną metodę całkowania równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go podał *Lagrange* [2]). Ten gieometra przedstawił w roku 1772 akademiji berlińskiéj rozprawę, w któréj sprowadził całkowanie jakichkolwiek równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go, między trzema zmiennemi, do całkowania takich samych równań, ale linijowych względem cząstkowych pochodnych; w roku zaś 1779 wyłożył w rozprawie, przedłożonéj akademiji paryzkiéj, sposób całkowania równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go, linijowych, między ilukolwiek ilościami zmiennemi.

---

[1]) Leonhard Eulers: Vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Joseph Salomon. Wien. 1830 T. III, str. 32 i nast.

[2]) Leçons sur le calcul des fonctions. Paris, 1806. st. 386 i nast.

Po tych pracach *Lagrange'a* zupełnie było rozwiązane zagadnienie całkowania równań o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go i linijowych względem tychże pochodnych, a co do równań takich samych a nie linijowych, potrzeba było metodę *Lagrange'a* rozszerzyć do ilukolwiek zmiennych. To rozszerzenie wydało się gieometrom po bezowocnych usiłowaniach *Charpit'a* [1]) niepodobném do wykonania, dlatego porzucono drogę wskazaną przez *Lagrange'a*, i usiłowano dojść do celu innym sposobem.

W roku 1814 sprowadził *Pfaff* [2]) całkowanie jakiegokolwiek równania różniczkowego o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go do całkowania zwykłych równań różniczkowych. Atoli metoda *Pfaffa* wymaga przy równaniu zawierającém n zmiennych niezależnych całkowania n układów zwykłych równań różniczkowych jednoczesnych; dlatego, chociaż rozwiązała ona zagadnienie pod względem teoretycznym, starano się z powodu jéj uciążliwości wynaleźć inną prostszą metodę.

Cauchy [3]) okazał pierwszy, że całkowanie pierwszego układu równań *Pfaffa* zupełnie wystarcza do zupełnego rozwiązania zadania. Do tego samego wniosku doszedł późniéj ale na innéj drodze gieometra niemiecki *Jacobi* [4]).

Zdawałoby się, że po tych pracach można teoryję równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go uważać za zupełnie ukończoną. Istotnie tak jest, o ile zadanie sprowadzono do łatwiejszego zadania. Wszelako z powodu, że metoda *Cauchy'ego* powtórnie wynaleziona przez *Jacobiego*, nie prowadzi do całki drogą naturalną, którą samo zadanie wskazuje, nadto z powodu wiel-

---

[1]) Histoire de l'academie royale des sciences, 1784.

[2]) Abhandlungen der Berliner Academie der Wissenschaften 1814—1815: „Methodus generalis aequationes differentiarum particularium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, in ter quatuorque variabiles, complete integrandi.“

[3]) Exercices d'analyse et de physique mathématique. T. II, p 241. Także: Notes sur le calcul differentiel et le calcul integral par Serret. Note II, p. 101.

[4]) Crelle: Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. XVII, str. 158.

kiéj liczby zbytecznych całkowań byłoby bardzo pożądaném rozszerzenie metody *Lagrange'a*, która wielką prostotą celuje. To rozszerzenie udało się *Jacobiemu;* jego praca pośmiertna [1]) zawiera ostatni wyraz umiejętności.

* * *

W niniejszéj rozprawie zamierzyłem wyłożyć sposób całkowania równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go, w sposób odpowiedni obecnemu stanowi tego działu umiejętności, i zarazem dać obraz historycznego rozwoju tego przedmiotu. Dlatego podzieliłem rozprawę na cztery rozdziały. W *pierwszym* jest mowa o całkowaniu równań różniczkowych rzędu 1-go i linijowych, między ilukolwiek zmiennemi, równań, do których przy dzisiejszym stanie umiejętności sprowadza się całkowanie równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go. W *rozdziale drugim* wyłożyłem sposób *Lagrange'a* całkowania równań o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go i linijowych, jako téż sposoby *Boole'a* [2]) i *Jacobiego* całkowania układu takichże równań jednoczesnych. W *rozdziale trzecim* wyjaśniłem najprzód znaczenie rozwiązania zupełnego, ogólnego i osobliwego równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go i nielinijowych, wykazałem związek między temi różnemi całkami, poczém wyłożyłem dawniejsze metody całkowania *Pfaffa* i *Cauchy'ego*. W *czwartym* i *ostatnim rozdziale* wyłożyłem dawną metodę *Lagrange'a* i rozszerzyłem ją do ilukolwiek zmiennych.

---

[1]) Crelle Journal. T. LX. str. 1—181: „Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis, inter numerum variabilium quemcunque propositas, integrandi.

Także. Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi. Berlin, 1866, str. 237 — 800.

[2]) Treatise on differential equations. Supplementary volume. Cambridge and London. 1865, str. 74 — 89.

Bacząc na wielkie ubóstwo naszéj literatury matematycznéj, a przeto chcąc swą rozprawę uczynić przystępną i pożyteczną dla obszerniejszego koła czytelników, wciągnąłem w jéj zakres — nad pierwotny zamiar — niektóre przedmioty, traktowane już w kompendyjach, i dałem dla wyjaśnienia teoryji dostateczną liczbę przykładów.

Pisałem w Warszawie, w Styczniu 1867 r.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RZĘDU 1-go, LINIJOWYCH, MIĘDZY ILUKOLWIEK ZMIENNEMI.

1. Gdy

$$x,\ x_1,\ldots,x_m$$

są ilości zmienne, a

$$X,\ X_1,\ldots,X_m$$

dane funkcyje tych zmiennych, wtedy równanie różniczkowe:

$$(1)\qquad X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_m\,dx_m = 0$$

będzie tak zwaném równaniem różniczkowém rzędu 1-go, linijowém, między $m+1$ ilościami zmiennemi.

Już Euler okazał w trzeciéj części swego rachunku całkowego, że całka takiego równania tylko wtedy może być przedstawioną pod postacią jednego równania pierwotnego, gdy współczynniki X_i dopełniają pewnych warunków, zwanych warunkami całkowalności.

Załóżmy, że równanie (1) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, i niech będzie:

$$(2)\qquad f(x,\ x_1,\ldots x_m) = \text{const}$$

tém równaniem pierwotném. Ponieważ równanie (2) jest z założenia całką równania (1), przeto, jeśli z tego równania (2) wyrazi-

my jednę zmienną np. x przez wszystkie inne $x_2, \ldots, x_m$, i tę wartość podstawimy w równanie (1), natenczas to równanie (1) winno stać się identycznem.

Wyraźmy więc z (2) np. zmienną x przez inne zmienne, skutkiem czego będzie:

$$dx = \frac{dx}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{dx}{dx_m} dx_m,$$

i podstawmy tę wartość w równanie (1), tedy otrzymamy równanie:

$$\left(X_1 + X\frac{dx}{dx_1}\right) dx_1 + \ldots + \left(X_m + X\frac{dx}{dx_m}\right) dx_m = 0,$$

które z powodu niezależności zmiennych $x_1, \ldots, x_m$ rozkłada się na następujące m równań:

$$(3) \qquad X_1 + X\frac{dx}{dx_1} = 0, \ldots, X_m + \frac{dx}{dx_m} = 0.$$

Te równania winny zamienić się na tożsamości po podstawianiu wartości na x wyrażonéj z (2) w funkcyji zmiennych $x_1, \ldots, x_n$. Aby wynaleźć warunki całkowalności, uważajmy którekolwiek dwa z pomiędzy równań (3); np.:

$$(4) \qquad X_\beta + X\frac{dx}{dx_\beta} = 0, \quad X_\gamma + X\frac{dx}{dx_\gamma} = 0, \quad [0 < \beta < \gamma \leqq m].$$

Różniczkując pierwsze względem x_γ, a drugie względem x_β i zważając, że podług (2) jest x funkcyą zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, otrzymamy:

$$\frac{dX_\beta}{dx_\gamma} + \frac{dX_\beta}{dx}\frac{dx}{dx_\gamma} + \left(\frac{dX}{dx_\gamma} + \frac{dX}{dx}\frac{dx}{dx_\gamma}\right)\frac{dx}{dx_\beta} + X\frac{d^2x}{dx_\beta\, dx_\gamma} = 0,$$

$$\frac{dX_\gamma}{dx_\beta} + \frac{dX_\gamma}{dx}\frac{dx}{dx_\beta} + \left(\frac{dX}{dx_\beta} + \frac{dX}{dx}\frac{dx}{dx_\beta}\right)\frac{dx}{dx_\gamma} + X\frac{d^2x}{dx_\beta\, dx_\gamma} = 0;$$

a gdy te dwa równania od siebie odejmiemy, wypadnie:

$$\frac{dX_\beta}{dx_\gamma} - \frac{dX_\gamma}{dx_\beta} + \left(\frac{dX}{dx_\gamma} - \frac{dX_\gamma}{dx}\right)\frac{dx}{dx_\beta} + \left(\frac{dX_\beta}{dx} - \frac{dX}{dx_\beta}\right)\frac{dx}{dx_\gamma} = 0,$$

albo, gdy za $\frac{dx}{dx_\beta}$, $\frac{dx}{dx_\gamma}$ podstawimy wartości z (4),

$$(5)\quad X\left(\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}-\frac{dX_\gamma}{dx_\beta}\right)+X_\beta\left(\frac{dX_\gamma}{dx}-\frac{dX}{dx_\gamma}\right)+X_\gamma\left(\frac{dX}{dx_\beta}-\frac{dX_\beta}{dx}\right)=0.$$

Kładąc w równaniu (5) za β, γ wszystkie różne kombinacyje skazówek z szeregu liczb $1, 2, \ldots, m$ otrzymamy $\binom{m}{2}$ równań kształtu (5).

Te wszystkie równania powinny współczynniki X_i równania (1) identycznie sprawdzić, jeżeli równanie (1) ma być całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego. Równania (5) będą więc żądanemi warunkami całkowalności.

Używając symbolów:

$$(6)\qquad (i, k) = \frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i}$$

przyczém:

$$(7)\qquad (i, k) = -(k, i)\quad , \quad (i, i) = 0$$

i nadto:

$$(8)\qquad (h, i, k) = X_h\,(i, k) + X_i\,(k, h) + X_k\,(h, i),$$

przyczém:

$$(9)\quad \begin{cases} (h, i, k) = (i, k, h) = (k, h\, i) & \\ & (i, i, k) = 0\,,\ (i, i, i) = 0 \\ (h, i, k) = -(i, h, k)\,, & \end{cases}$$

możemy warunki całkowalności przedstawić symbolicznie przez:

$$(10)\qquad (o, \beta, \gamma) = 0 \qquad [o < \beta < \gamma \leqq m],$$

pomnąc że $x_0 = x$, $X_0 = X$.

Zważywszy, że wszystko jedno, którą z ilości zmiennych $x, x_1 \ldots, x_m$ wyrazimy w funkcyji wszystkich innych z równania pierwotnego (2), nadto bacząc na własności (9) wprowadzonych symbolów, możemy jeszcze wypowiedzieć twierdzenie, że gdy równanie (1) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, natenczas współczynniki X_i sprawdzają identycznie równanie:

$$(11)\qquad (\alpha, \beta, \gamma) = 0\,,$$

gdzie α, β, γ są jakiekolwiek trzy liczby z szeregu liczb 0, 1. 2, . . , m.

2. Jeżeli wszystkie $\binom{m}{2}$ warunków (10) są dopełnione, zatém jeżeli równanie (1) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, pytamy się, jak można wynaleźć tę całkę. To całkowanie polega na następującém twierdzeniu:

„Jeżeli w równaniu (1) uznamy pewną liczbę zmiennych za ilości stałe, w skutku czego to równanie zamienia się na:

$$(12) \quad X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots X_\beta\,dx_\beta = 0\,, \; [0 < \beta < m]\,,$$

i jeżeli te równanie jest przy pewnéj wartości β całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego: natenczas będzie także równanie:

$$(13) \quad X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_\beta\,dx_\beta + X_\gamma\,dx_\gamma = 0,$$

gdzie $0 < \beta < \gamma < m$, całkowalném pod postacią jednego równania pierwotnego.“

Niech bowiem będzie:

$$(14) \qquad x = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_\beta\,, x_\gamma\,, c)$$

całką równania (12). Funkcya φ zawiera prócz zmiennych $x_1, \ldots, x_\beta$ jeszcze przynajmniéj niektóre z pomiędzy tych ilości, któreśmy za stałe uznali, między temi ostatniemi niech będzie ilość x_γ; stała całkowania c może być zaś uważaną jako funkcyja wszystkich tych ilości, któreśmy uznali za stałe.

Funkcyja φ, jako funkcyja zmiennych $x_1, \ldots, x_\beta$ sprawdza identycznie równania (podług wzorów 3)

$$(15) \qquad X_1 + X\frac{d\varphi}{dx_1} = 0, \ldots, X_\beta + X\frac{d\varphi}{dx_\beta} = 0.$$

Prawdziwość powyższego twierdzenia dowiedziemy, gdy okażemy, że ilość c może być jako funkcyja ilości x_γ tak oznaczoną, aby wyrażenie (14) przedstawiało całkę równania (13).

Różniczkując w tym celu równanie (14) z tém jednak przypuszczeniem, że także x_γ jest zmienną, a c funkcyją téj zmiennéj, otrzymamy:

$$dx = \frac{d\varphi}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_\beta} dx_\beta + \frac{d\varphi}{dx_\gamma} dx_\gamma + \frac{d\varphi}{dc} dc,$$

albo, gdy za $\frac{d\varphi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\varphi}{dx_\beta}$ podstawimy wartości z (15),

$$dx = -\frac{X_1}{X} dx_1 - \ldots - \frac{X_\beta}{X} dx_\beta + \frac{d\varphi}{dx_\gamma} dx_\gamma + \frac{d\varphi}{dc} dc,$$

albo nareszcie:

$$X\, dx + X_1 dx_1 + \ldots + X_\beta dx_\beta = X \frac{d\varphi}{dx_\gamma} dx_\gamma + X \frac{d\varphi}{dc} dc$$

Ztąd czytamy, że w powyższém przypuszczeniu będzie (14) całką równania (13), jeżeli nieznana funkcyja c zmiennéj x_γ uczyni zadość równaniu:

$$-X_\gamma dx_\gamma = X \frac{d\varphi}{dx_\gamma} dx_\gamma + X \frac{d\varphi}{dc} dc,$$

lub, gdy ilość c może być obrachowana jako funkcyja zmiennéj x_γ z równania:

$$(16) \qquad dc = -\frac{X_\gamma + X \frac{d\varphi}{dx_\gamma}}{X \frac{d\varphi}{dc}} dx_\gamma$$

Ilość c może być z (16) oznaczoną jako funkcyja ilości x_γ, jeżeli wyrażenie:

$$u = \frac{X_\gamma + X \frac{d\varphi}{dx_\gamma}}{X \frac{d\varphi}{dc}}$$

po podstawieniu wartości (14) za x jest od zmiennych $x_1, \ldots, x_\beta$ niezależném. Różniczkując poprzednie wyrażenie względem któréjkolwiek z tych zmiennych $x_1, \ldots x_\beta$ np. x_λ $[0 < \lambda < \beta + 1]$, otrzymamy po wykonaniu łatwego rachunku z uwzględnieniem równań (15):

$$\frac{du}{dx_\lambda} = \frac{X(\lambda, \gamma) + X_\lambda(\gamma, 0) + X_\gamma(0, \lambda)}{X^2 \frac{d\varphi}{dc}} \cdot \begin{bmatrix} 0 < \lambda < \beta + 1 \\ 0 < \beta < \gamma m + 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ mianownik po prawéj nie może być ani zerem ani nieskończonością, przeto gdy równanie (12) jest całkowalne, będzie $\frac{du}{dx_\lambda} = 0$, zkąd wypada, że wyrażenie u po podstawieniu wartości (15) będzie istotnie niezależne od $x_1, \ldots, x_3$; można zatém z (16) ilość c tak oznaczyć w funkcyji x_γ, aby wyrażenie (15) było całką równania (14).

3. Z tego badania wynika następująca reguła na całkowanie równania (1):

„Uznając tylko dwie ilości x, x_1 za zmienne, sprowadzamy dane równanie do kształtu

$$\text{(A)} \qquad X\,dx + X_1\,dx_1 = 0.$$

W całce ogólnéj tego równania

$$\text{(B)} \qquad x = f(x_1\, x_2, \ldots, x_n, c) \text{ —}$$

uznajemy także ilość x_2 za zmienną, a stałą całkowania c za dowolną funkcyją ilości x_2. Całkując (podług artykułu 2go) równanie różniczkowe:

$$\text{(C)} \qquad dc = -\frac{X_2 + X\frac{df}{dx_2}}{X\frac{df}{dc}}\,dx_2$$

po podstawieniu wartości za x z (B) otrzymamy:

$$\text{(D)} \qquad c = \varphi(x_2, c_1),$$

gdzie c_1 jest stałą całkowania.

Podstawiwszy wartość (D) w (B) otrzymamy wyrażenie:

$$\text{(E)} \qquad x = f_1(x_1, x_2\, x_3, \ldots, x_n, c_1),$$

jako ogólną całkę równania:

$$\text{(F)} \qquad X\,dx + X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 = 0.$$

Uznajemy w (E) także x_3 za zmienną, a c_1 za dowolną funkcyją ilości x_3. Całkując znowu równanie:

$$(G) \qquad c_1 = -\int \frac{X_3 + X\frac{df_1}{dx_2}}{X\frac{df_1}{dc_1}}\, dx_3$$

po podstawieniu wartości za x z (E) otrzymamy:

$$(H) \qquad c_1 = \varphi_1\,(x_3\,,\,c_2\,)\,;$$

a gdy wartość (H) podstawimy w (E) otrzymamy:

$$(K) \qquad x = f_2\,(x_1\,,\,x_2\,,\,.\,.\,,\,x_n\,,\,c_2)$$

jako ogólną całkę równania:

$$(L) \qquad X\,dx + X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 = 0$$

i t. d."

Objaśnimy tę regułę przykładem.

Uważajmy równanie między trzema zmiennemi:

$$(a) \qquad (x_2 + b)^2\,dx_1 + x\,dx_2 - (x_2 + b)\,dx = 0$$

Ponieważ:

$$X = -(x_2 + b),\; X_1 = (x_2 + b)^2,\;\; X_2 = x,$$

zatém:

$$(1, 2) = 2\,(x_2 + b),\;\; (2, 0) = 2,\;\; (0, 1) = 0,$$

przeto jest identycznie:

$$(0, 1, 2) = 0;$$

równanie (a) jest więc całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego.

Uznając x_2 za ilość stałą, otrzymamy z (a) równanie różniczkowe:

$$(b) \qquad (x_2 + b)^2\,dx_1 - (x_2 + b)\,dx = 0,$$

między dwiema zmiennemi x, x_1, którego ogólną całką jest:

$$(c) \qquad x = (x_2 + b)\,x_1 + c = f\,(x_1\,,\,x_2\,,\,c).$$

Podstawiwszy tę wartość w równaniu (C) t. j. w:

$$dc = -\frac{X_2 + X_1 \dfrac{df}{dx_2}}{X \dfrac{df}{dc}} dx_2$$

otrzymamy:

$$\text{(d)} \qquad dc = \frac{c}{x_2 + b} dx_2$$

zkąd:

$$\text{(e)} \qquad c = a(x_2 + b);$$

a gdy tę wartość podstawimy w (c) wypadnie wyrażenie:

$$\text{(f)} \quad x = (x_2 + b)\, x_1 + a(x_2 + b) = (x_1 + a)(x_2 + b),$$

przedstawiające ogólną całkę równania (a). Ilość a jest jedyną stałą całkowania.

Uwaga. Zamiast ilości x_2 moglibyśmy ilość x uznać za stałą i doszlibyśmy do téj saméj całki (f). Atoli uznając ilość x_1 za stałą nie otrzymalibyśmy żądanéj całki, z powodu że w całce równania

wzór C doprowadzi, do całki szukanej

$$x\, dx_2 - (x_2 + b)\, dx = 0$$

nie byłaby wyraźnie zawartą ilość x_1, uznana za stałą, czego wyraźnie wymaga wyłożona poprzód teoryja.

4. Jeżeli równanie (1) nie jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, moglibyśmy następnie szukać warunków, przy których to równanie jest całkowalne pod postacią dwóch, trzech,.., k równań pierwotnych. Rachunki, które w tym względzie trzebaby wykonać, są raczéj mozolne niż trudne, dlatego tém chętniéj je opuszczamy, że to nam do naszego celu wcale niepotrzebne (*). Znaleźlibyśmy postępując podobnym sposobem, jak w pierwszych dwóch artykułach, że równanie (1) jest całko-

---

*) Obszerne i gruntowne badania w tym względzie znajdzie czytelnik w dziele: Die Differenzial-und Integralrechnung von. J. L. Raabe. Zürich. 1847. Band IIb. str. 443—536.

walne pod postacią k równań pierwotnych, jeżeli współczynniki X_i dopełniają $\left(\frac{m-2(k-1)}{2}\right)$ warunków. Ponieważ zaś ta liczba jest zerem dla $k=\frac{m+1}{2}$, jako też dla $k=\frac{m+2}{2}$: przeto zważywszy że k może być tylko liczbą całkowitą doszlibyśmy do następującego twierdzenia: „Równanie różniczkowe, linijowe, między $m+1$ zmiennemi i kształtu (1) jest *bezwarunkowo* całkowalne pod postacią $\frac{m+1}{2}$ lub pod postacią $\frac{m+2}{2}$ równań pierwotnych, według tego czy liczba ilości zmiennych jest parzystą lub nieparzystą."

To twierdzenie, na którém polega metoda Pfaffa całkowania równań o cząstkowych pochodnych rzędu 1go, może być niezależnie od poprzednich badań dowiedzione.

Ten sposób całkowania równania (1) polega na następującém twierdzeniu zasadniczém:

„Równanie różniczkowe, linijowe, między parzystą liczbą $m+1$ zmiennych i kształtu (1) można za pomocą stosownie dobranych podstawień, wyrażających m zmiennych w funkcyji $m+1^{ej}$ i m nowych zmiennych, zamienić na inne, zawierające tylko te nowe zmienne."

Prawdziwość tego twierdzenia udowodnimy, gdy okażemy, że z warunków zadania można niewątpliwie obrachować podstawienia, za pomocą których można liczbę ilości zmiennych o jednę pomniejszyć.

5. Przypuśćmy że równania

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 = \psi_1(x, a_1, \ldots, a_m), \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_m = \psi_m(x, a_1, \ldots, a_m), \end{cases}$$

w których $a_1, .., a_m$ są nowe ilości zmienne, w liczbie m, dają takie wartości na $x_1, .., x_m$, które podstawione w równaniu (1) zamieniają to równanie na inne, zawierające tylko te nowe zmienne.

Jeżeli w równaniu (1), które krócéj tak pisać można:

$$(18) \qquad X\,dx + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} X_\alpha\,dx_\alpha = 0$$

podstawimy powyższe wartości (17) t. j. gdy położymy ogólnie:

$$(19)\begin{cases} x_\alpha = \psi_\alpha\,(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) \\ dx_\alpha = \dfrac{dx_\alpha}{dx}dx + \dfrac{dx_\alpha}{da_1}da_1 + ,\ldots, + \dfrac{dx_\alpha}{da_m}da_m \qquad [\alpha = 1, 2, \ldots, m] \\ \qquad = \dfrac{dx_\alpha}{dx}dx + \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=m} \dfrac{dx_\alpha}{da_\beta}da_\beta\,, \end{cases}$$

tedy otrzymamy równanie

$$(20) \qquad R\,dx + \sum_{\beta=1}^{\beta=m} A_\beta\,da_\beta = 0,$$

gdzie:

$$(21) \qquad R = X + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{dx}, \quad A_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{da_\beta}.$$

Ażeby równanie (20) zawierało tylko nowe zmienne a_1, a_2,..., a_m, potrzeba: 1° aby po podstawieniu wartości (17) równanie:

$$(22) \qquad R = X + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{dx} = 0$$

było identycznie sprawdzone; a 2° aby współczynniki A_1, A_2... A_m zmiennéj x albo nie zawierały, albo gdy ją zawierają, aby ta zmienna znajdowała się w czynniku, wspólnym tym wszystkim współczynnikom. Ten drugi warunek będzie dopełniony, gdy dla każdych dwóch z pomiędzy tych współczynników A_β, A_γ jest identycznie

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{A_\beta}{A_\gamma} = 0\,, \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dx} \cdot \log \frac{A_\beta}{A_\gamma} = 0,$$

albo, jeżeli zważymy że:

$$\frac{d}{dx} \log \frac{A_\beta}{A_\gamma} = \frac{1}{A_\beta}\frac{dA_\beta}{dx} - \frac{1}{A_\gamma}\frac{dA_\gamma}{dx},$$

gdy jest identycznie

$$(23)\qquad \frac{1}{A_\beta}\cdot\frac{dA_\beta}{dx}=\frac{1}{A_\gamma}\,\frac{dA_\gamma}{dx}=\frac{1}{N},$$

gdzie N jest pewna funkcyja zmiennej x.

Warunek (22) i warunki (23), których jest m, albowiem β lub γ może przyjąć jakąkolwiek wartość z szeregu liczb $1, 2, .., m$ wystarczą do obrachowania m podstawień (17) i do oznaczenia ilości N.

Istotnie różniczkując drugie równanie (21) względem x i zważając że podług (17) ilości $x_1, x_2, .., x_m$ zależą także od x, otrzymamy:

$$\frac{dA_\beta}{dx}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\left(\frac{dX_\alpha}{dx}\right)\frac{dx_\alpha}{da_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}X_\alpha\frac{d^2x_\alpha}{da_\beta\,dx},$$

gdzie pochodna $\left(\frac{dX_\alpha}{dx}\right)$ zamknięta w nawias dla okazania, że różniczkowanie ma być wykonane nietylko względem wyraźnego ale także względem uwikłanego x.

Różniczkując podobnie równanie identyczne (22) względem a_β, otrzymamy:

$$0=\left(\frac{dX}{da_\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\left(\frac{dX_\alpha}{da_\beta}\right)\frac{dx_\alpha}{dx}+\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}X_\alpha\frac{d^2x_\alpha}{da_\beta\,dx};$$

a gdy to równanie odejmiemy od poprzedzającego, wypadnie:

$$\frac{dA_\beta}{dx}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\left(\frac{dX_\alpha}{dx}\right)\frac{dx_\alpha}{da_\beta}-\left(\frac{dX}{da_\beta}\right)-\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\left(\frac{dX_\alpha}{da_\beta}\right)\frac{dx_\alpha}{dx},$$

co także tak pisać można:

$$\frac{dA_\beta}{dx}=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\left(\frac{dX_\alpha}{dx}\right)\frac{dx_\alpha}{da_\beta}-\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\left(\frac{dX_\alpha}{da_\beta}\right)\frac{dx_\alpha}{dx},$$

zważywszy że

$$X_0=X,\ \frac{dx_0}{da_\beta}=\frac{dx}{da_\beta}=0,\quad \frac{dx_0}{dx}=\frac{dx}{dx}=1.$$

Atoli

$$\left(\frac{dX_\alpha}{dx}\right) = \frac{dX_\alpha}{dx} + \frac{dX_\alpha}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} + \ldots + \frac{dX_\alpha}{dx_m}\frac{dx_m}{dx} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m}\frac{dX_\alpha}{dx_\gamma}\frac{dx_\gamma}{dx},$$

$$\left(\frac{dX_\alpha}{da_\beta}\right) = \frac{dX_\alpha}{dx_1}\frac{dx_1}{da_\beta} + \ldots + \frac{dX_\alpha}{dx_m}\frac{dx_m}{da_\beta} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m}\frac{dX_\alpha}{dx_\gamma}\frac{dx_\gamma}{da_\beta}.$$

gdzie $\frac{dX_\alpha}{dx_\gamma}$ jest pochodna, wzięta względem wyraźnego x_γ.

Gdy te wartości podstawimy w ostatniém równaniu, tedy będzie:

$$\frac{dA_\beta}{dx} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=m}\frac{dX_\alpha}{dx_\gamma}\frac{dx_\alpha}{da_\beta}\frac{dx_\gamma}{dx} - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=m}\frac{dX_\alpha}{dx_\gamma}\frac{dx_\alpha}{dx}\frac{dx_\gamma}{da_\beta},$$

albo gdy w drugiéj sumie zamienimy skazówki między sobą, co nie zmieni jéj wartości, i użyjemy znanego symbolu:

$$(24) \qquad (\alpha,\gamma) = \frac{dX_\alpha}{dx_\gamma} - \frac{dX_\gamma}{da_\beta}, \ (\alpha,\gamma) = -(\gamma,\alpha), \ (\alpha,\alpha) = 0,$$

$$\frac{dA_\beta}{dx} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=m}(\alpha,\gamma)\,\frac{dx_\gamma}{dx}\frac{dx_\alpha}{da_\beta}.$$

Podstawmy tę wartość, jakoteż wartość

$$A_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{da_\beta} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{da_\beta}$$

w równaniu warunkowém (23), które tak pisać można:

$$N\frac{dA_\beta}{dx} = A_\beta,$$

otrzymamy ostatecznie równanie:

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=m} N(\alpha,\gamma)\,\frac{dx_\gamma}{dx}\cdot\frac{dx_\alpha}{da_\beta} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{da_\beta},$$

które rozkłada się na $m+1$ równań kształtu:

$$\sum_{\gamma=0}^{\gamma=m} N(\alpha, \gamma) \frac{dx_\gamma}{dx} = X_\alpha \quad [\alpha = 0, 1, 2, .., m]$$

t. j. na równania:

$$(25) \begin{cases} (0, 0) N + (0, 1) N \frac{dx_1}{dx} + .. + (0, m) N \frac{dx_m}{dx} = X, \\ (1, 0) N + (1, 1) N \frac{dx_1}{dx} + .. + (1, m) N \frac{dx_m}{dx} = X_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (m, 0) N + (m, 1) N \frac{dx_1}{dx} + .. + (m, m) N \frac{dx_m}{dx} = X_m . \end{cases}$$

6. Z tych $m+1$ równań (25), linijowych względem ilości N, $N \frac{dx_1}{dx}$, .., $N \frac{dx_m}{dx}$, oznaczymy te ostatnie ilości w funkcyji zmiennych $x, x_1, .., x_m$ znanym sposobem rugowania. Wartości tych $m+1$ ilości przedstawiają się pod postacią ułomków o wspólnym mianowniku, który jest determinantem współczynników, mianowicie:

$$\begin{vmatrix} (0, 0, , (0, 1), .., (0, m) \\ (1, 0), (1, 1), .., (1, m) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ (m, 0), (m, 1), .., (m, m) \end{vmatrix} .$$

Ten determinant, którego odpowiednie wyrazy (α, β), (β, α) są liczebnie równe a co do znaku przeciwne, a wyrazy na przekątni leżące są równe zeru, jest identycznie równy zeru, jeżeli jego rzęd jest nieparzysty. Ztąd wnosimy że oznaczenie ilości N, $N \frac{dx_1}{dx}$, .., tylko wtedy możebne, jeżeli liczba $m+1$ ilości zmiennych x, x_1, x_2 ... w równaniu (1) jest parzystą.

Oznaczywszy z równań (25) te $m+1$ ilości N, $N \frac{dx_1}{dx}$, ..., $N \frac{dx_m}{dx}$ i podzieliwszy wartości m ostatnich przez wartość pierwszéj, w skutku czego wyruguje się ilość N: otrzymamy

$$\frac{dx_1}{dx} = \varphi_1 (x, x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dx_m}{dx} = \varphi_m (x, x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Gdy ten układ m równań jednoczesnych zcałkujemy i z m całek oznaczymy m ilości $x_1, x_2, \ldots, x_m$ w funkcyji ilości x i m stałych całkowania, które oznaczamy przez $a_1, a_2, \ldots, a_m$, otrzymamy wyrażenia:

$$x_1 = \psi_1 (x, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_m = \psi_m (x, a_1 a_2, \ldots, a_m).$$

Uważając ilości stałe całkowania $a_1, a_2, \ldots, a_m$ za nowe ilości zmienne podstawmy ostatnie wartości w równaniu (1), tedy to równanie zamieni się na inne

$$A_1 \, da_1 + A_2 \, da_2 + \ldots + A_m \, da_m = 0,$$

zawierające tylko m nowych zmiennych.

7. Uważajmy szczególny przypadek, gdy równanie dane zawiera tylko cztery zmienne; zatem gdy mamy:

$$X \, dx + X_1 \, dx_1 + X_2 \, dx_2 + X_3 \, dx_3 = 0. \tag{26}$$

W tym przypadku będą równania (25)

$$\left. \begin{aligned} &(0,0) N + (0,1) N \frac{dx_1}{dx} + (0,2) N \frac{dx_2}{dx} + (0,3) N \frac{dx_3}{dx} = X, \\ &(1,0) N + (1,1) N \frac{dx_1}{dx} + (1,2) N \frac{dx_2}{dx} + (1,3) N \frac{dx_3}{dx} = X_1, \\ &(2,0) N + (2,1) N \frac{dx_1}{dx} + (2,2) N \frac{dx_2}{dx} + (2,3) N \frac{dx_3}{dx} = X_2, \\ &(3,0) N + (3,1) N \frac{dx_1}{dx} + (3,2) N \frac{dx_2}{dx} + (3,3) N \frac{dx_3}{dx} = X_3. \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Ilości nieznane N, $N\frac{dx_1}{dx}$, $N\frac{dx_2}{dx}$, $N\frac{dx_3}{dx}$, oznaczone z tych równań przedstawią się pod postacią ułomków o wspólnym mianowniku.

Oznaczywszy wspólny mianowuik za Jacobim *) przez symbol (0, 1, 2, 3) gdzie:

(28) $(0, 1, 2, 3) = (0, 1)(2, 3) + (0, 2)(3, 1) + (0, 3)(1, 2),$

otrzymamy:

$$(29)\quad \begin{cases} N = \dfrac{0 + (3, 2) X_1 + (1, 3) X_2 + (2, 1) X_3}{(0, 1, 2, 3)}, \\[2ex] N\dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{(2, 3) X + 0 + (3, 0) X_2 + (0, 2) X_3}{(0, 1, 2, 3)}, \\[2ex] N\dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{(3, 1) X + (0, 3) X_1 + 0 + (1, 0) X_3}{(0, 1, 2, 3)}, \\[2ex] N\dfrac{dx_3}{dx} = \dfrac{(1, 2) X + (2, 0) X_1 + (0, 1) X_2 + 0}{(0, 1, 2, 3)}; \end{cases}$$

a dzieląc trzy ostatnie równania (29) przez pierwsze znajdziemy układ zwykłych równań różniczkowych:

$$(30)\quad \begin{aligned} dx : dx_1 : dx_2 : dx_3 = &- [0 + (2,3) X_1 + (3,1) X_2 + (1,2) X_3] \\ &: [(2,3) X + 0 + (3,0) X_2 + (0,2) X_3] \\ &: - [(1,3) X + (3,0) X_1 + 0 + (0,1) X_3] \\ &: [(1,2) X + (2,0) X_1 + (0,1) X_2 + 0]. \end{aligned}$$

Jest jeden przypadek, w którym wyrażenia (29) nie dadzą wartości na N N, $\frac{dx_1}{dx}$, . . . , mianowicie gdy równanie (26) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego. Albowiem w tym przypadku są wszystkie liczniki po prawéj równe zeru i wspólny mianownik równy zero, jak łatwo można okazać.

---

*) Theorie und Anwendung der Determinannten. Baltzer, Leipzig. 1857. §. 8. str. 29.

Że liczniki są zero jest widoczną, gdyż równania:

$$\begin{aligned}
0 + (2,3)\,X + (3,1)\,X_2 + (1,2)\,X_3 &= 0,\\
(2,3)\,X + 0 + (3,0)\,X_2 + (0,2\;X_3 &= 0,\\
(1,3)\,X + (3\;0)\,X_1 + 0 + (0,1)\,X_3 &= 0,\\
(1,2)\,X + (2\;0)\,X_1 + (0,1)\,X_2 + 0 &= 0,
\end{aligned}$$

przedstawiają warunki całkowalności. Rugując zaś między temi czterema równaniami, linijowemi i jednorodnemi względem ilości $X, X_1, \ldots$, te ostatnie ilości, otrzymamy na wypadek:

$$(0, 1, 2, 3) = 0, \quad c.\ b.\ d.\ o,$$

W tym wyjątkowym przypadku przedstawiają się więc ilości N, $N \dfrac{dx_1}{dx}, \ldots$, pod postacią nieoznaczoną $\dfrac{0}{0}$, co dowodzi, że równania (27) nie są między sobą różne, lecz że jedno jest algebraicznym wynikiem trzech innych.

Opuszczając przeto jedno z równań (27) i naznaczając na N dowolną wartość np. $N=1$, co jest dozwolone w tym razie, otrzymamy wartości oznaczone na $\dfrac{dx_1}{dx}, \dfrac{dx_2}{dx}, \dfrac{dx_3}{dx}$.

Jako przykład uważajmy równanie:

$$\text{(a)} \qquad x_1\,dx + x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x\,dx_3 = 0.$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned}
(0,1) = 1,\quad (0,2) &= 0,\quad (0,3) = -1,\\
(1,2) &= 1,\quad (1,3) = 0,\\
& (2,3) = 1,
\end{aligned}$$

przeto równania (30) zamieniają się na:

$$\text{(b)} \qquad dx : dx_1 : dx_2 : dx = -(x_2+x) : (x_1+x_3) : -(x_2+x) : (x_1+x_3).$$

Gdy ten układ trzech równań różniczkowych zcałkujemy, otrzymamy:

$$
\text{(c)} \quad \left\{
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_3}{2\,(2\,x + a_2)} + \frac{a_1}{2} \\
x_2 &= x + a_2 \\
x_3 &= \frac{a_3}{2\,(2\,x + a_2)} - \frac{a_1}{2},
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są trzy stałe całkowania. Uważając te stałe całkowania za nowe zmienne, podstawmy wartości (c) w równaniu (a), tedy wypadnie równanie zawierające tylko te nowe zmienne:

$$
\text{(a)} \qquad a_2\, da_1 - a_1\, da_2 + da_3 = 0,
$$

8. Poznaliśmy, że w równaniu linijowém kształtu (1) z parzystą liczbą zmiennych, można zawsze pomniejszyć liczbę ilości zmiennych o jednę zmienną za pomocą stósownych podstawień, które należy rachować z równań Pfaffa (25). W przypadku, gdy liczba zmiennych jest nieparzystą, byłby wspólny mianownik ilości N, $N \dfrac{dx_1}{dx}, \ldots$, rachowanych z równań (25), identycznie równy zeru, dlatego to pomniejszenie tylko wtedy jest możebne, gdy wszystkie liczniki są także równe zeru; albowiem w tym razie ilości N, $N \dfrac{dx_1}{dx}, \ldots$, przedstawiłyby się pod postacią nieoznaczoną $\dfrac{0}{0}$, coby dowodziło, że równania (25) nie są między sobą różne, lecz jedno wynikiem wszystkich innych. Opuściwszy zatem jedno z tych równań i położywszy $N = 1$ otrzymalibyśmy zawsze m równań na oznaczenie m ilości $\dfrac{dx_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dx_m}{dx}$. Ostatni przypadek zachodzi wtedy, gdy dane równanie jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego.

Uważajmy tylko równanie między trzema zmiennemi

$$
\text{(31)} \qquad X\,dx + X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 = 0.
$$

Równania (25) zamienią się w tym przypadku na:

$$(32)\quad \begin{cases} (0,0)\,N + (0,1)\,N\dfrac{dx_1}{dx} + (0,2)\,N\dfrac{dx_2}{dx} = X\,, \\ (1,0)\,N + (1,1)\,N\dfrac{dx_1}{dx} + (1,2)\,N\dfrac{dx_2}{dx} = X_1\,, \\ (2,0)\,N + (2,1)\,N\dfrac{dx_1}{dx} + (2,2)\,N\dfrac{dx_2}{dx} = X_2\,. \end{cases}$$

Zwykłym sposobem rugowania znajdziemy z tych równań:

$$N = \frac{L}{M},\quad N\frac{dx_1}{dx} = \frac{L_1}{M},\quad N\frac{dx_2}{dx} = \frac{L_2}{M},$$

gdzie:

$$M = \begin{vmatrix} (0,0)\,, (0,1)\,, (0,2) \\ (1,0)\,, (1,1)\,, (1,2) \\ (2,0)\,, (2,1)\,, (2,2) \end{vmatrix} = 0,$$

a

$$L = (1,2)\,[(1,2)\,X + (2,0)\,X_1 + (0,1)\,X_2],$$
$$L_1 = (2,0)\,[(1,2)\,X + (2,0)\,X_1 + (0,1)\,X_2],$$
$$L_2 = (0,1)\,[(1,2)\,X + (2,0)\,X_1 + (0,1)\,X_2].$$

Ztąd czytamy, że gdy równanie (31) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, zatem gdy:

$$(1,2)\,X + (2,0)\,X_1 + (0,1)\,X_2 = 0\,,$$

natenczas także liczniki L, L_1, L_2 będą zero.

Jako przykład uważajmy równanie:

$$\text{(a)}\quad (x_1 - x_2)\,dx + (x_2 - x)\,dx_1 + (x - x_1)\,dx_2 = 0.$$

Ponieważ

$$(0,1) = 2,\quad (0,2) = -2,\quad (1,2) = 0,$$

przeto warunek całkowalności:

$$(0,1,2) = 2\,(x_1 - x_2) + 2\,(x_2 - x) + 2\,(x - x_1) = 0.$$

Opuszczając zatem ostatnie równanie (32) i kładąc $N=1$, otrzymamy na oznaczenie $\frac{dx_1}{dx}$, $\frac{dx_2}{dx}$ dwa równania:

$$2\frac{dx_1}{dx}-2\frac{dx_2}{dx}=x_1-x_2$$

$$-2+2\frac{dx_2}{dx}=x_2-x\,;$$

zkąd:

$$\text{(b)}\quad\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dx}-\dfrac{1}{2}x_1=1-\dfrac{1}{2}x\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dx}-\dfrac{1}{2}x_2=1-\dfrac{1}{2}x\end{cases}$$

Całkując te równania linijowe i oznaczając przez a_1, a_2 dwie stałe całkowania, otrzymamy:

$$\text{(c)}\quad\begin{cases}x_1=x+a_1e^{\frac{1}{2}x},\\x_2=x+a_2e^{\frac{1}{2}x}.\end{cases}$$

Uważając następnie stałe całkowania a_1, a_2 jako nowe zmienne podstawmy wartości (c) w równaniu (a), tedy wypadnie:

$$\text{(e)}\qquad a_2\,da_1-a_1\,da_2=0\,,$$

zkąd:

$$\text{(f)}\qquad a_1=c\,a_2\,,$$

gdzie c jest stałą całkowania. Podstawmy w (f) wartości na a_1, a_2 w funkcyji pierwotnych zmiennych z (c), otrzymamy całkę danego równania (a):

$$\text{(g)}\qquad x_1-x=c\,(x_2-x).$$

9. Z badań poprzednich artykułów wynika twierdzenie: „W równaniu różniczkowém rzędu 1go i linijowém, między parzystą liczbą zmiennych, można zawsze pomniejszyć liczbę zmiennych o jedną zmienną za pomocą podstawień, rachowanych podług reguły Pfaffa. W takiém samém równaniu z nieparzystą liczbą zmiennych jest to pomniejszenie możebne tylko wtedy, gdy

równanie jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego."

Pozostaje nam jeszcze do wyłożenia sposób całkowania równania (1) pod postacią $\frac{m+1}{2}$ lub $\frac{m+2}{2}$ równań pierwotnych, według tego czy liczba $m+1$ jest parzystą lub nieparzystą. Uważajmy pierwszy przypadek, gdy liczba zmiennych w równaniu (1):

$$(A) \qquad X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_m\,dx_m = 0$$

jest parzystą.

Sposobem powyżéj wyłożonym rachujemy podstawienia

$$(B) \qquad x_\alpha = \psi_\alpha(x, a_1, \ldots, a_m), \quad [\alpha = 1, 2, \ldots, m]$$

w skutku których równanie (A) zamienia się na inne:

$$(C) \qquad A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + \ldots + A_m\,da_m = 0$$

zawierające tylko nowe zmienne $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Aby w tém równaniu pomniejszyć liczbę zmiennych, ustanawiamy między zmiennemi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dowolny związek albo przyrównywamy jednę zmienną do dowolnéj stałéj, t. j. kładziemy albo:

$$(D) \qquad f_1(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0,$$

albo:

$$(D') \qquad a_m = c_1,$$

W skutku pierwszego lub w skutku drugiego przyjęcia zamienia się równanie (C) na inne z $m-1$ zmiennemi:

$$(E) \qquad (A_1)\,da_1 + (A_2)\,da_2 + \ldots + (A_{m-1})\,da_{m-1} = 0,$$

gdzie ogólnie (A_i) jest wartość, którą przyjmie współczynnik A_i równania (C) po podstawieniu za a_m wartości albo z (D) albo z (D').

Sposobem Pfaffa rachujemy następnie podstawienia:

$$(F) \quad a_\beta = \chi_\beta(a_{m-1}, b_1\, b_2, \ldots, b_{m-2}), \; [\beta = 1, 2, \ldots, m-2]$$

w skutku których równanie (E) zamienia się na inne:

$$(G) \qquad B_1\,db_1 + B_2\,db_2 + \ldots + B_{m-2}\,db_{m-2} = 0.$$

A gdy znowu położymy:

$$\text{(II)} \qquad f_2(b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}) = 0$$

lub:

$$\text{(H')} \qquad b_{m-2} = c_2$$

gdzie c_2 jest dowolną stałą, równanie (G) zamieni się na:

$$\text{(I)} \quad (B_1)\, db_1 + (B_2)\, db_2 + \ldots + (B_{m-3})\, db_{m-3} = 0$$

gdzie (B_i) jest wartość współczynnika B_i równania (G) po podstawieniu wartości na b_{m-2} z (H) lub z (H').

Postępując ciągle tym samym sposobem, t. j. pomniejszając liczbę zmiennych albo sposobem Pfaffa, albo przez ustanowienie dowolnego związku między zmiennemi lub przez przyrównanie jednéj zmiennéj do dowolnéj stałéj; otrzymamy ostatecznie równanie między dwiema zmiennemi

$$\text{(K)} \qquad N_1\, dn_1 + N_2\, dn_2 = 0,$$

które całkowane daje

$$\text{(L)} \qquad f_{\frac{m+1}{2}}(m, n_2) = c_{\frac{m+1}{2}}.$$

Równania (D), (H), . . , (L) przedstawiają całkę równania (A) - tych równań jest $\frac{m+1}{2}$ i zawierają one jednę stałą dowolną, mianowicie tę, która wchodzi do ostatniego równania. Takich układów równań przedstawiających całkę równania (A) można nieskończenie wiele otrzymać, z powodu dowolności funkcyj (D), (H), . . , .

Równania zaś (D'), (H'), . . , (L) przedstawiają także całkę równania (A) – tych równań jest także $\frac{m+1}{2}$, ale one zawierają $\frac{m+1}{2}$ stałych dowolnych c_1, c_2, . . , $c_{\frac{m+1}{2}}$. Naturalnie potrzeba tak w równaniach (D), (H), (L), jako téż w równaniach (D'), (H'), . . , (L) różne zmienne wyrazić przez pierwotne zmienne za pomocą podstawień (B), (F), . . , któreśmy sposobem Pfaffa kolejno rachowali.

Jeżeliby równanie (A) zawierało nieparzystą liczbę ilości zmiennych, natenczas zaczęlibyśmy powyższy proceder, od ustanowienia dowolnego związku lub od przyrównania jednéj zmiennéj do dowolnéj stałéj.

Uważajmy np. równanie

$$(a) \qquad x_1\, dx + x_2\, dx_1 + x_3\, dx_2 + x\, dx_3 = 0$$

badane już w artykule siódmym.

W skutku podstawień

$$(b) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_3}{2\,(2\,x + a_2)} + \dfrac{a_1}{2}, \\ x_2 = x + a_2, \\ x_3 = \dfrac{a_3}{2\,(2\,x + a_2)} - \dfrac{a_1}{2}, \end{cases}$$

zamieniło się to równanie na

$$(c) \qquad a_2\, da_1 - a_1\, da_2 + da_3 = 0.$$

Jeżeli położymy:

$$(d) \qquad a_3 = c_1\,,$$

gdzie c_1 jest dowolną stałą, równanie (c) przejdzie na

$$a_2\, da_1 - a_1\, da_2 = 0,$$

zkąd:

$$(e) \qquad a_1 = c_2\, a_2\,,$$

gdzie c_2 jest drugą stałą dowolną. Podstawiwszy w równaniach (d), (e) wartości na a_1, a_2, a_3, z (b) t. j.

$$(f) \qquad \begin{cases} a_1 = x_1 - x_3\,, \\ a_2 = x_2 - x\,, \\ a_3 = \dfrac{x_1 + x_3}{x_2 + x}\,, \end{cases}$$

otrzymamy dwa równania:

$$(g) \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = c_1\,(x_2 + x), \\ x_1 - x_3 = c_2\,(x_2 - x) \end{cases}$$

z dwiema dowolnemi stałemi c_1, c_2, przedstawiające całkę równania (a).

Nieskończenie wiele całek tego samego równania (a) pod postacią dwóch równań, zawierających tylko jednę stałą dowolną, można otrzymać, ustanawiając między zmiennemi a_1, a_2, a_3 jakikolwiek związek, a następnie rugując za pomocą tego związku jednę zmienną z równania (c).

Uwaga. Z tą metodą całkowania równania (1) połączona jest ta niedogodność, że z układów równań Pfaffa, z których rachujemy kolejne podstawienia, tylko pierwszy układ można sformować, a dla następnych podać tylko prawo, podług jakiego się je sformuje, gdy wszystkie poprzedzające układy zcałkujemy. Tę niedogodność usunął Jacobi tym sposobem, że zamiast stałych dowolnych, które całkowanie układu równań Pfaffa bezpośrednio daje, wprowadził inne ilości jako nowe zmienne, mianowicie początkowe wartości pierwotnych zmiennych, zatem po zcałkowaniu pierwszego układu (25) te wartości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_m$, które te zmienne przyjmą przy $x=0$. Ponieważ do naszego celu potrzebny nam tylko piérwszy układ równań Pfaffa, przeto poprzestajemy na téj wzmiance *).

10. Jeżeli równanie (1) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, natenczas można to równanie pierwotne otrzymać także przez ciągłe pomniejszanie liczby ilości zmiennych. Nasuwałaby się tu tylko jedna wątpliwość, mianowicie czy równanie, które otrzymamy po zmniejszeniu liczby ilości zmiennych jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, jeżeli niém było dane równanie. Że ta wątpliwość nie może mieć miejsca, dowodzimy jak następuje.

Jeżeli równanie (1) jest całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, wtedy musi być identycznie (podług art. 1)

---

*) Udoskonaloną metodę Pfaffa znajdzie czytelnik w Crelle Journal i t. d. Tom XVII str. 158 i nast., ustęp 12; jakotéż tom LX, str. 193—250.

$$\text{(a)} \qquad (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \,,$$

gdzie α, β, γ, są jakiekolwiek liczby z szeregu 0, 1, 2, . . , m.

Podstawienia

$$\text{(b)} \qquad x_r = \psi_r \,(x\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_m), \ [r = 1, 2 \,..\, m]$$

zamieniają równanie (1) na inne:

$$\text{(c)} \qquad \sum_{s=1}^{s=m} A_s \, da_s = 0 \,,$$

gdzie:

$$\text{(d)} \qquad A_s = \sum_{t=1}^{t=m} X_t \frac{dx_t}{da_s} \,.$$

Ostatnie równanie jest całkowalne, gdy znowu:

$$\text{(e)} \qquad (h, i, k) = 0 \,,$$

gdzie h, i, k są jakiekolwiek liczby z szeregu 1, 2, . . , m i gdzie:

$$(h,i,k) = A_h \left(\frac{dA_i}{da_k} - \frac{dA_k}{da_i}\right) + A_i \left(\frac{dA_k}{da_h} - \frac{dA_h}{da_k}\right) + A_k \left(\frac{dA_h}{da_i} - \frac{dA_i}{da_h}\right).$$

Niech skazówce α, odpowiada skazówka h, skazówce β, skazówka i, a skazówce γ skazówka k, t. j. połóżmy podług (d):

$$\text{(f)} \qquad A_h = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} X_\alpha \frac{dx_\alpha}{da_h}, \quad A_i = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} X_\beta \frac{dx_\beta}{da_i}, \quad A_k = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} X_\gamma \frac{dx_\gamma}{da_k} \,.$$

Różniczkujmy drugie równanie względem a_k i zważmy że:

$$\left(\frac{dX_\beta}{da_k}\right) = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \frac{dX_\beta}{dx_\gamma} \frac{dx_\gamma}{da_k},$$

tedy będzie:

$$\frac{dA_i}{da_k} = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} X_\beta \frac{d^2 x_\beta}{da_i \, da_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \frac{dX_\beta}{dx_\gamma} \frac{dx_\beta}{da_i} \frac{dx_\gamma}{da_k} \,;$$

różniczkując podobnie trzecie równanie względem a_i, otrzymamy:

$$\frac{dA_k}{da_i} = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} X_\gamma \frac{d^2 x_\gamma}{da_i \, da_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \frac{dX_\gamma}{dx_\beta} \frac{dx_\beta}{da_i} \frac{dx_\gamma}{da_k} \,;$$

a gdy te dwa równania od siebie odejmiemy, wypadnie:

$$\frac{dA_i}{da_k} - \frac{dA_k}{da_i} = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \left(\frac{dX_\beta}{dx_\gamma} - \frac{dX_\gamma}{dx_\beta} \right) \frac{dx_\beta}{da_i} \frac{dx_\gamma}{da_k}$$

lub symbolicznie:

$$\text{(g)} \qquad (i, k) = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} (\beta, \gamma) \frac{dx_\beta}{da_i} \frac{dx_\gamma}{da_k} .$$

Podobnie znajdziemy:

$$\text{(h)} \qquad (k, h) = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} (\gamma, \alpha) \frac{dx_\gamma}{da_k} \frac{dx_\alpha}{da_h} ,$$

$$\text{(k)} \qquad (h, i) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=1} (\alpha, \beta) \frac{dx_\alpha}{da_h} \frac{dx_\beta}{da_i} .$$

Jeżeli pomnożymy te trzy równania (g), (h), (k) odpowiednio przez równania (f) i dodamy do siebie iloczyny, natenczas wypadnie:

$$\text{(l)} \qquad (h, i, k) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} (\alpha, \beta, \gamma) \frac{dx_\alpha}{da_h} \frac{dx_\beta}{da_i} \frac{dx_\gamma}{da_k} ,$$

zkąd wynika bezpośrednio, że gdy

$$(\alpha, \beta, \gamma) = 0 ,$$

wtedy także:

$$(h, i, k) = 0,$$

co było do okazania *).

*) Dowód powyższy zamieścił autor w Grunnert's Archiv der Mathematik und Physik tom 46.

ROZDZIAŁ DRUGI.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O CZĄSTKOWYCH POCHODNYCH RZĘDU 1-go I LINIJOWYCH.

---

1. Rozumiejąc przez x zmienną zależną, a przez $x_1, \ldots, x_n$ zmienne niezależne, nazwiemy równanie różniczkowe:

$$(1) \qquad X = X_1 \frac{dx}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{dx}{dx_n},$$

w którém $X, X_1, \ldots, X_n$ są dane funkcyje wszystkich zmiennych, równaniem różniczkowém o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go i linijowém.

Jeżeli dla krótkości cząstkowe pochodne oznaczać będziemy jedną literą p, to jest jeżeli położymy ogólnie

$$(2) \qquad p_i = \frac{dx}{dx_i},$$

wtedy równanie (1) przyjmie kształt:

$$(3) \qquad X = X_1\, p_1 + \ldots + X_n\, p_n.$$

Równanie skończone między zmiennemi $x, x_1, \ldots, x_n$, z którego zmienna zależna x, wyrażona w funkcyji zmiennych niezależnych $x_1, \ldots, x_n$, sprawdza identycznie równanie (3), nazywamy rozwiązaniem lub całką tego równania.

A zatém równanie:

$$(4) \qquad x = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

będzie całką równania (3), jeżeli po podstawieniu wartości (4) równanie

$$(5) \qquad X = X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n}$$

będzie tożsamością.

Podobnie gdy mamy równanie skończone:

$$(6) \qquad f(x, x_1, \ldots x_n) = 0,$$

wtedy zważywszy, że ogólnie

$$p_i = -\frac{\frac{df}{dx_i}}{\frac{df}{dx}},$$

będzie równanie (6) całką równania (3), jeżeli równanie

$$(7) \qquad X\frac{df}{dx} + X_1 \frac{df}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{df}{dx_n} = 0$$

stanie się identycznem, gdy za x podstawimy wartość z (6).

2. Sposób całkowania równania (3) wynika bezpośrednio z jego genezy. Można okazać, że jeżeli pierwsza strona równania:

$$(8) \qquad F(u_1, \ldots, u_n) = 0$$

jest zupełnie dowolną funkcyją n ilości $u_1, \ldots, u_n$, które są danemi funkcyjami $n+1$ zmiennych $x, x_1, \ldots, x_n$: natenczas równanie (8) czyni zadość równaniu linijowemu kształtu (3), które otrzymamy rugując różniczki $dx, dx_1, \ldots, dx_n$ między równaniami $du_1 = 0, \ldots, du_n = 0$ i równaniem $dx - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$, wyrażającém związek między zmiennemi $x, x_1, \ldots, x_n$.

Różniczkując bowiem równanie (8) całkowicie, otrzymamy

$$\frac{dF}{du_1} du_1 + \ldots + \frac{dF}{du_n} du_n = 0.$$

Ponieważ funkcyja F jest z założenia zupełnie dowolną, przeto powyższe równanie może się przy wszelkich kształtach téj funkcyji tylko wtedy utrzymać, gdy oddzielnie

$$du_1 = 0 \, , \, . \, . \, , \, du_n = 0,$$

to jest, gdy:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{du_1}{dx}\,dx + \frac{du_1}{dx_1}\,dx_1 + \,.\,.\, + \frac{du_1}{dx_n}\,dx_n = 0, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\frac{du_n}{dx}\,dx + \frac{du_n}{dx_1}\,dx_1 + \,.\,.\, + \frac{du_n}{dx_n}\,dx_n = 0. \end{aligned} \right.$$

Oznaczając z tych n równań stosunki różniczek $dx, dx_1, .., dx_n$, otrzymamy

$$(10) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \,.\,.\, = \frac{dx_n}{X_n},$$

gdzie $X, X_1, .., X_n$ są dane funkcyje zmiennych $x, x_1, .., x_n$.

Formując równanie:

$$dx = p_1\,dx_1 + \,.\,.\, + dn_n\,dx_n,$$

i rugując różniczki $dx, dx_1, .., dx_n$ między równaniami (10) i tém ostatniém równaniem, otrzymamy równanie linijowe:

$$X = X_1\,p_1 + \,.\,.\, + X_n\,p_n$$

kształtu (3), któremu równanie (8) czyni zadość.

Z téj genezy równania (3) wynika zarazem sposób jego całkowania, mianowicie gdy oznaczymy całki układu n zwykłych równań różniczkowych (10), całki, które są niczém, jedno równaniami

$$(11) \qquad u_1 = c_1 \, , \, . \, . \, , \, u_n = c_n \, ,$$

gdzie $c_1, c_2, .., c_n$ są stałe dowolne, natenczas

$$(12) \qquad F(u_1, .., u_n) = 0, \quad \text{lub} \quad u_n = f(u_n, .., u_{n-1})$$

gdzie F, f są symbole dowolnéj funkcyji, będzie całką równania linijowego (3).

Ten sposób całkowania równania linijowego (3) wynaleziony przez Lagrange'a, lecz cokolwiek inaczéj uzasadniony, objaśnimy przykładem.

Uważajmy równanie:

$$\text{(a)} \qquad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = ax + \frac{x_1 x_2}{x_3}.$$

Równania Lagrange'a (10) zamieniają się w tym przypadku na:

$$\text{(b)} \qquad \frac{dx}{ax + \frac{x_1 x_2}{x_3}} = \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3},$$

lub

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{x_3}{x_1}; \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \frac{dx}{dx_1} = a\frac{x}{x_1} + \frac{x_2}{x_3}.$$

Dwa pierwsze dają bezpośrednio:

$$\text{(c)} \qquad \frac{x_3}{x_1} = c_3 \quad , \quad \frac{x_2}{x_1} = c_2,$$

gdzie c_2, c_3 są stałe całkowania, a trzecie zamieni się, gdy w niém położymy z (c) $x_3 = c_3 x_1$, $x_2 = c_2 x_1$ na jednorodne

$$\frac{dx}{dx_1} = a\frac{x}{x_1} + \frac{c_2}{c_3},$$

którego całką jest:

$$\text{(d)} \qquad \frac{(a-1)\,x + \frac{c_2}{c_3}\,x_1}{x_1^{\,a}} = c_1.$$

Równania całkowe (c), (d) rozwiązane względem stałych c_1, c_2, c_3 są więc:

$$\text{(e)} \qquad \frac{(a-1)\,x + \frac{x_1 x_2}{x_3}}{x_1^{\,a}} = c_1 \quad , \quad \frac{x_2}{x_1} = c_2 \quad , \quad \frac{x_3}{x_2} = c_3;$$

a zatém ogólna całka danego równania (a) będzie:

$$\text{(f)} \qquad (a-1)\,x + \frac{x_1\,x_2}{x_3} = x_1{}^a f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$

gdzie f jest symbol dowolnéj funkcyji.

3. Że całka (12) jest zarazem najogólniejszą możebną, dowiedziemy gdy okażemy, że każdą całkę można otrzymać z (12) uszczególniając kształt dowolnéj funkcyji F.

Niech bowiem będzie $f = 0$, gdzie f jest daną funkcyją zmiennych $x, x_1, \ldots, x_n$, całką równania (3); tedy będzie podług (7)

$$(13) \qquad X\frac{df}{dx} + X_1\frac{df}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{df}{dx_n} = 0.$$

Nadto rugując $dx, dx_1, \ldots, dx_n$ między równaniami (10) i równaniami (9), które wynikają z równań (11) przez różniczkowanie, otrzymamy:

$$(14) \qquad \left\{\begin{array}{l} X\dfrac{du_1}{dx} + X_1\dfrac{du_1}{dx_1} + \ldots + X_n\dfrac{du_1}{dx_n} = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;, \\ X\dfrac{du_n}{ux} + X_1\dfrac{du_n}{dx_1} + \ldots + X_u\dfrac{du_n}{dx_n} = 0. \end{array}\right.$$

Jeżeli wyrugujemy między temi $n+1$ równaniami (13) (14) linijowemi i jednorodnemi względem ilości $X, X_1, \ldots, X_n$ te ostatnie ilości, otrzymamy identyczność:

$$(15) \qquad \left|\begin{array}{c} \dfrac{df}{dx}, \dfrac{df}{dx_1}, \ldots, \dfrac{df}{dx_n} \\ \dfrac{du_1}{dx}, \dfrac{du_1}{dx_1}, \ldots, \dfrac{du_1}{dx_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{du_n}{dx}, \dfrac{du_n}{dx_1}, \ldots, \dfrac{du_n}{dx_n} \end{array}\right| = 0,$$

zkąd bezpośrednio wynika *), że ilość f musi być koniecznie funkcyją ilości $u_1, \ldots, u_n$, co było do okazania.

---

*) Zasadnicze twierdzenie z teoryji funkcyjonalnych determinan-

Wniosek. Równanie o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go, linijowe, między $n+1$ ilościami zmiennemi $x, x_1, \ldots, x_n$, posiada n, ale tylko n różnych rozwiązań, a każde inne rozwiązanie jest algebraicznym wynikiem tych n różnych rozwiązań. Albowiem każda z n całek równań Lagrange'a (10) jest rozwiązaniem równania (3), a każde inne jest dowolną funkcyją tych n różnych rozwiązań.

Uwaga. Równanie linijowe (3) możemy zamienić na jednorodne przez wprowadzenie nowéj zależnéj. Albowiem gdy:

$$V = \text{const}$$

jest całką równania (3), tedy będzie podług (7):

$$(16) \qquad X\frac{dV}{dx} + X_1\frac{dV}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{dV}{dx_n} = 0$$

równaniem jednorodném z nową zależną V; a gdy $u_1 = c_1, \ldots, u_n = c_n$ są całki równań Lagrange'a (10), wtedy:

$$(17) \qquad V = F(u_1, \ldots, u_n)$$

będzie najogólniejszą całką równania (16).

4. Uważajmy teraz m równań różniczkowych o cząstkowych pochodnych rzędu i stopnia 1-go, między $n+1$ zmiennemi $V, x_1, x_2, \ldots, x_n$, sprowadzonych do kształtu jednorodnego:

$$(18) \quad \begin{cases} A_{1,1}\dfrac{dV}{dx_1} + A_{1,2}\dfrac{dV}{dx_2} + \ldots + A_{1,n}\dfrac{dV}{dx_n} = 0, \\ A_{2,1}\dfrac{dV}{dx_1} + A_{2,2}\dfrac{dV}{dx_2} + \ldots + A_{2,n}\dfrac{dV}{dx_n} = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{m,1}\dfrac{dV}{dx_1} + A_{m,2}\dfrac{dV}{dx_2} + \ldots + A_{m,n}\dfrac{dV}{dx_n} = 0, \end{cases}$$

gdzie współczynniki $A_{i,k}$ są danemi funkcyjami zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a $m < n$.

---

tów, na którém oparte powyższe dowodzenie, wyłożyliśmy w oddzielnéj nocie, umieszczonéj na końcu téj rozprawy.

Rozumiejąc przez symbol Δ_i działanie wyrażone przez równanie:

$$(19)\qquad \Delta_i = A_{i,1}\frac{d}{dx_1} + A_{i,2}\frac{d}{dx_2} + \ldots + A_{i,n}\frac{d}{dx_n},$$

możemy układ równań (18) krócéj tak pisać:

$$(20)\qquad \Delta_1 V = 0,\quad \Delta_2 V = 0,\ldots,\quad \Delta_m V = 0.$$

Teoryją takiego układu równań różniczkowych jednoczesnych zajmowało się dwóch geometrów. Jacobi *) okazał, jak można wynaleźć wspólne rozwiązanie tego układu równań w pewnym szczególnym przypadku; Boole **) podał zaś ogólną metodę na wynalezienie wszystkich wspólnych rozwiązań i w każdym przypadku.

5. Metoda Boole'a opiéra się na następującém twierdzeniu: „Jeżeli na pierwszych stronach równań $\Delta_i V = 0$, $\Delta_k V = 0$, wykonamy działania wyrażone odpowiednio przez symbole Δ_k, Δ_i, i sformujemy równanie $\Delta_i \Delta_k V - \Delta_k \Delta_i V = 0$, lub prościéj $(\Delta_i \Delta_k - \Delta_k \Delta_i) V = 0$: natenczas ostatnie równanie będzie tego samego kształtu, co dwa pierwsze, i będzie identycznie sprawdzone przez wspólne rozwiązanie dwóch pierwszych."

Pierwsza część tego twierdzenia jest oczywista; albowiem wykonawszy na pierwszych stronach równań:

$$(21)\qquad \Delta_i V = 0,\quad \Delta_k V = 0$$

działania wyrażone odpowiednio przez symbole Δ_k, Δ_i, a następnie odjąwszy je od siebie, otrzymamy:

$$(\Delta_i \Delta_k - \Delta_k \Delta_i) V =$$

$$(\Delta_i A_{k,1} - \Delta_k A_{i,1})\frac{dV}{dx_1} + \ldots + (\Delta_i A_{k,n} - \Delta_k A_{i,n})\frac{dV}{dx_n} = 0,$$

gdyż wyrazy, do których wejdą drugie pochodne ilości V, zniosą się; albo gdy położymy ogólnie:

---

*) Crelle. Journal, tom LX, str. 1 i nast.

**) A Treatise on differential equations. Supplementary volume; Chapter 25.

$$(23) \quad \overset{(r)}{B}_{i,\,k} = \Delta_i \; A_{k,\,r} - \Delta_k \; A_{i,\,r}\,,$$

$$(23) \quad (\Delta_i \; \Delta_k - \Delta_k \; \Delta_i) \; V = \overset{(1)}{B}_{i,\,k} \frac{dV}{dx_1} + \ldots + \overset{(n)}{B}_{i,\,k} \frac{dV}{dx_n} = 0.$$

Co do drugiéj części załóżmy, że $V = \varphi \; (x_1, \ldots, x_n)$ jest wspólném rozwiązaniem równań $\Delta_i \; V = 0$, $\Delta_k \; V = 0$, że zatém:

$$\Delta_i \; \varphi = 0 \quad \text{i} \quad \Delta_k \; \varphi = 0.$$

Ponieważ ogólnie $\Delta_i \; 0 = 0$, przeto będzie:

$$\Delta_i \; \Delta_k \; \varphi = \Delta_i \; 0 = 0 \quad \text{i} \quad \Delta_k \; \Delta_i \; \varphi = \Delta_k \; 0 = 0,$$

a zatém także:

$$(\Delta_i \; \Delta_k - \Delta_k \; \Delta_i) \; \varphi = 0,$$

co było do okazania.

6. Metoda Jacobiego opiera się na następującém twierdzeniu Poissona *).

„Jeżeli równanie $(\Delta_i \; \Delta_k - \Delta_k \; \Delta_i) \; V = 0$ jest identyczném; zatém jeżeli przy wszelkich wartościach skazówki r z szeregu liczb $1, 2, \ldots, n$ jest identycznie $\overset{(r)}{B}_{i,\,k} = 0$, natenczas znając jedno rozwiązanie $V = \varphi \; (x_1, \ldots, x_n)$ równania $\Delta_i \; V = 0$, otrzymamy cały szereg jego rozwiązań, wykonywając na wyrażeniu φ kilkakrotnie działanie wyrażone przez symbol Δ_k."

Albowiem, gdy położymy w równaniu identyczném

$$(\Delta_i \; \Delta_k - \Delta_k \; \Delta_i) \; V = 0$$

$V = \varphi$, i zważymy że $\Delta_i \, \varphi = 0$, a zatém także $\Delta_k \; \Delta_i \; \varphi = 0$, otrzymamy:

$$\Delta_i \; \Delta_k \; \varphi = 0$$

zkąd czytamy, że także $\varphi_1 = \Delta_k \; \varphi$ jest rozwiązaniem równania $\Delta_i \; V = 0$. Wykonywając na φ_1 to samo działanie Δ_k, otrzymamy trzecie rozwiązanie $\varphi_2 = \Delta_k \; \varphi_1 = \Delta_k \; \Delta_k \; \varphi = \overset{2}{\Delta}_k \; \varphi$, i t. d.

---

*) Journal de l'école polytechnique. Cahier 15.

Postępując tym sposobem, otrzymamy z jednego rozwiązania $V = \varphi$ równania $\Delta_i V = 0$, cały szereg rozwiązań

$$\varphi , \varphi_1 = \Delta_k \varphi , \varphi_2 = \Delta_k \varphi_1 = \overset{2}{\Delta_k} \varphi , \ldots , \varphi_\mu = \Delta_k \varphi_{\mu-1} = \overset{\mu}{\Delta_k} \varphi .$$

Ponieważ równanie różniczkowe $\Delta_i V = 0$, prócz oczywistego rozwiązania $V = \text{const}$, może mieć tylko $n-1$ różnych rozwiązań, przeto w powyższym szeregu znajdzie się jedno, które nie jest nowém rozwiązaniem, lecz jest albo funkcyją wszystkich poprzednich albo ilością stałą, np.:

$$\varphi_\mu = f(\varphi , \varphi_1 , \ldots , \varphi_{\mu-1})$$

gdzie $\mu < n-1$.

7. Jeżeli równanie $(\Delta_i \Delta_k - \Delta_k \Delta_i) V = 0$ jest identycznem dla każdéj pary równań (3), wtedy wspólne rozwiązania tych równań wynajdziemy, jak następuje.

Najprzód szukamy wszystkich $n-1$ różnych rozwiązań pierwszego równania $\Delta_1 V = 0$. W tym celu wystawiamy równania Lagrange'a dla tego równania:

$$(24) \qquad \frac{dx_1}{A_{1,1}} = \frac{dx_2}{A_{1,2}} = \ldots = \frac{dx_n}{A_{1,n}} .$$

Jeżeli $u_1 = c_1 , \ldots , u_{n-1} = c_{n-1}$ są całki układu zwykłych równań różniczkowych (24), natenczas każda z nich będzie rozwiązaniem równania $\Delta_1 V = 0$, a najogólniejsze rozwiązanie będzie dowolną funkcyją ilości $u_1 , \ldots , u_{n-1}$, np.:

$$(25) \qquad V = F(u_1 , u_2 , \ldots , u_{n-1}).$$

Tę funkcyją F chcemy następnie tak oznaczyć, aby sprawdzała identycznie także wszystkie następne $m - 1$ równań $\Delta_2 V = 0 , \ldots , \Delta_m V = 0$.

Wprowadzając w tym celu najprzód zamiast pierwotnych zmiennych $x_1 , \ldots , x_n$ ilości $u_1 , \ldots , u_{n-1}\ x_n$ jako nowe niezależnie zmienne, którekolwiek z ostatnich $m - 1$ równań $\Delta_i V = 0$, gdzie $i = 2 , \ldots , m$, zamieni się na:

$$\Delta_i V = A_{i,1}\left[\frac{dV}{du_1}\frac{du_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dV}{du_{n-1}}\frac{du_{n-1}}{dx_1}\right] + \ldots$$

$$\ldots + A_{i,n}\left[\frac{dV}{du_1}\frac{du_1}{dx_n} + \ldots + \frac{dV}{du_{n-1}}\frac{du_{n-1}}{dx_n}\right] + A_{i,n}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) = 0,$$

albo przy inném uporządkowaniu

$$\Delta_i V = \left[A_{i,1}\frac{du_1}{dx_1} + \ldots + A_{i,n}\frac{du_1}{dx_n}\right]\frac{dV}{du_1} + \ldots$$

$$\ldots + \left[A_{i,1}\frac{du_{n-1}}{dx_1} + \ldots + A_{i,n}\frac{du_{n-1}}{dx_n}\right]\frac{dV}{du_{n-1}} + A_{i,n}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) = 0,$$

lub nareszcie:

$$\Delta_i V = \Delta_i u_1 \frac{dV}{du_1} + \ldots + \Delta_i u_{n-1}\frac{dV}{du_{n-1}} + A_{i,n}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) = 0,$$

gdzie $\left(\frac{dV}{dx_n}\right)$ jest pochodna, wzięta względem wyraźnego x_n.

Atoli jeżeli przez V rozumiemy rozwiązanie pierwszego równania, rozwiązanie, które podług (25) może zawierać wyraźnie tylko ilości $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, natenczas będzie $\left(\frac{dV}{dx_n}\right) = 0$, w skutku czego ostatnie równanie zamieni się na:

$$(26)\qquad \Delta_i u_1 \frac{dV}{du_1} + \ldots + \Delta_i u_{n-1}\frac{dV}{du_{n-1}} = 0,$$

gdzie $i = 2, \ldots, m$.

Równanie (26) przedstawia układ $m-1$ równań różniczkowych tego samego kształtu co równania (1) i zupełnie równoważny układowi (1); albowiem wspólne rozwiązanie układu (26) będą rozwiązaniami wspólnemi równań (1).

Nadto równania (26) nie zawierają prócz ilości $u_1, \ldots, u_{n-1}$ żadnych innych niezależnie zmiennych, albowiem z powodu tożsamości

$$(\Delta_i \Delta_k - \Delta_k \Delta_i) V = 0$$

przedstawia każdy współczynnik $\Delta_i u_k$ w równaniach (26) rozwiązanie równania $\Delta_1 V = 0$, w skutku czego musi być pewną funkcyją jedynie ilości $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Nareszcie jeżeli równania (26) oznaczymy znowu przez

$$(27)\qquad \Delta_1 V = 0,\quad \Delta_2 V = 0, \ldots, \Delta_{m-1} V = 0,$$

natenczas rownanie

$$(28)\qquad (\Delta_i \Delta_k - \Delta_k \Delta_i) V = 0$$

będzie znowu identycznėm dla każdych dwóch równań (27); albowiem wprowadzenie ilości $u_1, \ldots, u_{n-1}$, x_n jako nowych zmiennych niezależnych nie zmieniło natury równań, zatém równania (28) będą identycznemi po przerobieniu równań (1), jeżeli były identycznemi przy ich pierwotnéj postaci.

Całkowanie układu m równań (1) lub (3) między n niezależnemi $x_1, \ldots, x_n$ sprowadza się przeto do całkowania $m-1$ równań (26) lub (27) między $n-1$ niezależnemi $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Tak samo można układ (27) sprowadzić do układu $m-2$ równań między $n-2$ niezależnemi i t. d.

Postępując ciągle tym samym sposobem, otrzymamy w końcu jedno równanie różniczkowe o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go, linijowe i jednorodne, między $n-m+1$ niezależnemi, którego rozwiązania, wyrażone w funkcyji pierwotnych zmiennych, dadzą $n-m$ różnych rozwiązań wspólnych dla układu danego (1).

Jako przykład uważajmy dwa równania:

$$(a)\qquad \begin{cases} \Delta_1 V = x_1 \dfrac{dV}{dx_1} + x_1 x_4 \dfrac{dV}{dx_3} + x_4 \dfrac{dV}{dx_4} = 0, \\[2ex] \Delta_2 V = x_2 \dfrac{dV}{dx_2} + x_2 x_5 \dfrac{dV}{dx_4} + x_5 \dfrac{dV}{dx_5} = 0. \end{cases}$$

Równania Lagrange'a dla pierwszego równania są:

$$(b)\qquad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{x_1 x_4} = \frac{dx_4}{x_4} = \frac{dx_5}{0},$$

zatém jego rozwiązania:

$$(c)\qquad u_1 = x_2,\quad u_2 = x_5,\quad u_3 = \frac{x_4}{x_1},\ u_4 = x_3 - \frac{x_1 x_4}{2}.$$

Ponieważ:

$$\Delta_2 u_1 = x_2 = u_1,\ \Delta_2 u_2 = x_5 = u_2,\ \Delta_2 u_3 = 0,\ \Delta_2 u_4 = x_2 x_5 = u_1 u_2,$$

przeto wspólne rozwiązania równań (a), są rozwiązaniami równania:

$$(d) \quad u_1 \frac{dV}{du_1} + u_2 \frac{dV}{du_2} + u_1 u_2 \frac{dV}{du_4} = 0.$$

Równania Lagrange'a dla tego równania linijowego są:

$$(e) \quad \frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{u_2} = \frac{du_3}{0} = \frac{du_4}{u_1 \, u_2},$$

zatém równania:

$$(f) \quad u_3 = a, \quad u_2 = bu_1, \quad u_4 = \frac{u_1 \, u_2}{2} + c$$

lub podług (c):

$$(g) \quad x_4 = ax_1, \quad x_5 = bx_2, \quad x_3 = \frac{x_1 \, x_4}{2} + \frac{x_2 \, x_5}{2} + c,$$

gdzie a, b, c, są stałemi całkowania, przedstawiają wspólne rozwiązania żądane. Najogólniejsze zaś rozwiązanie równań (a) będzie:

$$(h) \quad x_3 - \frac{x_1 \, x_4}{2} - \frac{x_2 \, x_5}{2} = f\left(\frac{x_4}{x_1}, \frac{x_5}{x_2}\right),$$

gdzie f jest znak dowolnéj funkcyji.

8. Ogólny przypadek, w którym równania:

$$(29) \qquad (\Delta_i \, \Delta_k - \Delta_k \, \Delta_i) \, V = 0$$

nie są identycznemi dla każdéj pary danego układu (1) lub (3) sprowadza się do szczególnego przypadku, wyłożonego w poprzednim artykule.

Przedstawmy bowiem równania (1) pod następującą postacią:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dx_1} + A_{1,\,m+1} \frac{dV}{dx_{m+1}} + \ldots + A_{1,\,n} \frac{dV}{dx_n} = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad , \\ \frac{dV}{dx_m} + A_{m,\,m+1} \frac{dV}{dx_{m+1}} + \ldots + A_{m,\,n} \frac{dV}{dx_n} = 0, \end{array} \right.$$

co zawsze można zrobić przez rugowanie; połączmy z temi równaniami jedno z równań (29), które nie jest identycznem, i przedstaw-

my ten nowy układ o $m+1$ równaniach znowu pod postacią (30). Jeżeli niektóre z równań (29) dla tego nowego układu nie będą identycznemi, więc znowu jedno z tych równań połączmy z tym nowym układem, w skutku czego otrzymamy drugi układ nowy o $m+2$ równaniach, który znowu przedstawimy pod postacią (30) i t. d. Układy, które tym sposobem kolejno otrzymamy, będą podług artykułu 5-go równoważne danemu układowi (1). Atoli postępując tym sposobem albo otrzymamy w końcu układ, dla którego równania (29) będą identycznemi, albo dojdziemy do równań:

$$\frac{dV}{dx_1}=0,\ \frac{dV}{dx_2}=0,\ldots,\ \frac{dV}{dx_n}=0,$$

coby dowodziło, że równania (1) prócz oczywistego rozwiązania $V=\text{const}$, nie mają żadnego innego rozwiązania.

Uważajmy np. dwa równania:

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \Delta_1 V=\dfrac{dV}{dx_1}+(x_4+x_1x_2+x_1x_3)\dfrac{dV}{dx_3}+(x_2+x_3-3x_1)\dfrac{dV}{dx_4}=0, \\ \Delta_2 V=\dfrac{dV}{dx_2}+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)\dfrac{dV}{dx_3}+(x_3x_4-x_2)\dfrac{dV}{dx_4}=0, \end{cases}$$

dla których

$$\text{(b)}\qquad (\Delta_1\Delta_2-\Delta_2\Delta_1)V=x_1\frac{dV}{dx_3}+\frac{dV}{dx_4}=0$$

Łącząc to równanie z równaniami (a) otrzymamy nowy układ:

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \Delta_1 V=\dfrac{dV}{dx_1}+(3x_1^2+x_4)\dfrac{dV}{dx_3}=0, \\ \Delta_2 V=\dfrac{dV}{dx_2}+x_2\dfrac{dV}{dx_3}=0, \\ \Delta_3 V=\dfrac{dV}{dx_4}+x_1\dfrac{dV}{dx_3}=0, \end{cases}$$

który możemy całkować podług reguły danéj w artykule 7.

Znajdziemy

$$\text{(d)}\qquad V=x_3-x_1^3-x_1x_4-\frac{x_2^2}{2}=\text{const}$$

na rozwiązanie układu (c) lub, co jedno, układu (a).

9. Jeżeli chodzi nam tylko o szczególne rozwiązanie wspólne układu równań (1) lub (3) i to dla przypadku, gdy wszystkie równania $(\Delta_i\ \Delta_k - \Delta_k\ \Delta_i)\ V = 0$ są identycznemi, możemy użyć metody Jacobiego.

Niech będzie $V = \varphi$ jedno rozwiązanie pierwszego równania $\Delta_1\ V = 0$, zatém (podług twierdzenia Poissona):

$$(31)\qquad \varphi, \varphi_1 = \Delta_2\ \varphi, \varphi_2 = \Delta_2\ \varphi_1 = \overset{2}{\Delta}_2\ \varphi, \ldots, \varphi_\mu = \Delta_2\ \varphi_{\mu-1} = \overset{\mu}{\Delta}_2\ \varphi$$

szereg innych rozwiązań, pomiędzy któremi dopiero:

$$(32)\qquad \varphi_\mu = f(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1})$$

gdzie $\mu < n - 1$. Wprowadzając zamiast μ pierwotnych zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ ilości $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, jako nowe niezależnie zmienne, otrzymamy (podobnie jak w artykule 7 postępując) na oznaczenie wspólnego rozwiązania dwóch pierwszych równań $\Delta_1\ V = 0$, $\Delta_2\ V = 0$ równanie:

$$\Delta_2\ \varphi \frac{dV}{d\varphi} + \Delta_2\ \varphi_1 \frac{dV}{d\varphi_1} + \ldots + \Delta\varphi_{\mu-1} \frac{dV}{d\varphi_{\mu-1}} = 0$$

albo podług (31), (32):

$$(33)\qquad \varphi_1 \frac{dV}{d\varphi} + \varphi_2 \frac{dV}{d\varphi_1} + \ldots + \varphi_{\mu-1} \frac{dV}{d\varphi_{\mu-2}} + f \frac{dV}{d\varphi_{\mu-1}} = 0.$$

Niech będzie $V = \psi(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1})$ jedno z rozwiązań tego równania, lub, co jedno, wspólne rozwiązanie dwóch pierwszych równań $\Delta_1\ V = 0$, $\Delta_2\ V = 0$, zatém:

$$(35)\qquad \psi, \psi_1 = \Delta_3\ \psi, \psi_2 = \Delta_3\ \psi_1 = \overset{2}{\Delta}_3 \psi, \ldots, \psi_\nu = \Delta_3\ \psi_{\nu-1} = \overset{\nu}{\Delta}_3\ \psi$$

szereg innych rozwiązań, między któremi dopiero

$$(36)\qquad \psi_\nu = f_1(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{\nu-1})$$

gdzie $\nu < n - 3$, wtedy wspólne rozwiązanie trzech pierwszych równań $\Delta_1\ V = 0$, $\Delta_2\ V = 0$, $\Delta_3\ V = 0$ będzie rozwiązaniem równania:

$$\Delta_3\ \psi \frac{dV}{d\psi} + \Delta_3\ \psi_1 \frac{dV}{d\psi_1} + \ldots + \Delta_3\ \psi_{\nu-1} \frac{dV}{d\psi_{\nu-1}} = 0,$$

lub podług (35), (36)

$$(37) \quad \psi_1 \frac{dV}{d\psi} + \psi_2 \frac{dV}{d\psi_1} + \cdot \cdot + \psi_{\nu-1} \frac{dV}{d\psi_{\nu-2}} + f_1 \frac{dV}{d\psi_{\nu-1}} = 0$$

i t. d.

Jako przykład uważajmy trzy równania (c) artykułu 8. Równania Lagrange'a dla pierwszego z tych równań są:

$$dx_1 = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{3\,x_1^3 + x_4} = \frac{dx_4}{0},$$

zatém:

$$\varphi = x_3 - x_1^3 - x_1\,x_4 = \text{coust.}, \quad \varphi_1 = \Delta_2\ \varphi = x_2\,,$$

$$\varphi_2 = \Delta_2\ \varphi_1 = 1$$

są jego rozwiązania. Rozwiązanie wspólne dwóch pierwszych równań (c) daje równanie:

$$\varphi_1 \frac{dV}{d\varphi} + \frac{dV}{d\varphi_1} = 0.$$

Równanie Lagrange'a dla tego ostatniego równania jest:

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1} = d\varphi_1\,,$$

zatém:

$$(d) \quad V = \varphi - \frac{1}{2}\ \varphi_1^2 = x_3 - x_1^3 - x_1\,x_4 - \frac{x_2^2}{2} = \text{const}$$

będzie wspólném rozwiązaniem dwóch pierwszych równań. Ponieważ jednak wartość (d) sprawdza identycznie trzecie równanie $\Delta_3\ V = 0$, przeto jest (d) wspólném rozwiązaniem wszystkich trzech równań.

ROZDZIAŁ TRZECI.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O CZĄSTKOWYCH POCHODNYCH RZĘDU 1-go, NIE LINIJOWYCH.

---

1. Niech będzie dane równanie skończone

$$(1) \qquad x = f(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots, a_n)$$

między $n+1$ zmiennemi $x, x_1, \ldots, x_n$, zawierające n stałych dowolnych $a_1, \ldots, a_n$. Uważając x za zależną a $x_1, \ldots, x_n$ za zmienne niezależne, różniczkujmy to równanie cząstkowo względem każdéj z niezależnych. Tym sposobem otrzymamy n równań:

$$(2) \qquad p_1 = \frac{df}{dx_1}, \ldots, p_n \frac{df}{dx_n}.$$

Oznaczmy z pierwszych n równań (1), (2) wartości na $a_1, \ldots, a_n$ w funkcyji ilości $x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, i podstawmy te wartości w ostatniém równaniu (2), tedy wypadnie równanie różniczkowe o cząstkowych pochodnych rzędu Igo:

$$(3) \qquad F(x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

które niezawiera stałych dowolnych, a któremu czyni zadość równanie skończone (1).

Równanie skończone (1), czyniące zadość równaniu (3) i zawierające tyle stałych dowolnych, ile jest zmiennych niezależnych,

nazywamy, używając terminologiji Lagrange'a, rozwiązaniem zupełném (solution complète) równania (3).

Jeżeli więc równanie (1) jest rozwiązaniem równania (3), wtedy musi być identycznie:

$$F\left(f, x_1, \ldots, x_n, \frac{df}{dx_1}, \ldots, \frac{df}{dx_n}\right) = 0.$$

Aby zaś równanie (1) było zupełném rozwiązaniem równania (3), to nie dość, aby zawierało n stałych dowolnych, lecz nadto potrzeba, aby było można z tego równania i z którychkolwiek n—1 np. z n—1 pierwszych równań (2) oznaczyć stałe $a_1, \ldots, a_n$ w funkcyji ilości $x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$; gdyż w razie przeciwnym rugowanie stałych $a_1, \ldots, a_n$ między równaniami (1), (2) nie doprowadziłoby do równania (3).

Ostatni warunek będzie zawsze dopełniony, gdy wyrażenia $f, \frac{df}{dx_1}, \ldots, \frac{df}{dx_{n-1}}$, uważane jako funkcyje ilości $a_1, \ldots, a_n$, są między sobą różne, zatem jeżeli determinant funkcyjonalny z tych funkcyj względem $a_1, \ldots, a_n$ nie jest identycznie zero *).

2. Prócz rozwiązania zupełnego uważają się jeszcze całki innego kształtu, mianowicie: całka ogólna (integral général) i rozwiązanie osobliwe (solution singulaire).

Wykazanie znaczenia tych odmiennych całek i sposób ich otrzymywania z rozwiązania zupełnego jest przedmiotem następnych badań **).

Uważmy, że wypadek rugowania ilości stałych $a_1, \ldots, a_n$ między rozwiązaniem zupełném (1) i równaniami (2) będzie ten sam, jakiekolwiek naznaczymy wartości na te stałe dowolne. Możemy je nawet uważać jako zmienne t. j. jako funkcyje ilości $x_1, \ldots, x_n$ tak oznaczone, aby kształt równań (2) nie zmienił się.

Uważając ilości $a_1, \ldots, a_n$ jako funkcyje zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ i następnie różniczkując w tém przypuszczeniu równa-

*) Nota na końcu rozprawy.
**) Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi; str. 471.

nie (1) cząstkowo względem $x_1, \ldots, x_n$ otrzymamy w miejsce równań (2) następujące równania:

$$p_1 = \frac{df}{dx_1} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_1} + \ldots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$p_n = \frac{df}{dx_n} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_n} + \ldots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_n}.$$

Te równania nie będą się różnić od równań (2), gdy ilości $a_1, \ldots, a_n$ oznaczymy jako funkcyje zmiennych niezależnych $x_1, \ldots, x_n$ tak, aby było

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_1} + \ldots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_n} + \ldots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_n} = 0. \end{cases}$$

Tym n równaniom linijowym i jednorodnym względem pochodnych $\frac{df}{da_1}, \ldots, \frac{df}{da_n}$ możemy dwojakim sposobem uczynić zadość:

albo 1⁰ zakładając

$$(5) \qquad \frac{df}{da_1} = 0, \ldots, \frac{df}{da_n} = 0,$$

albo 2⁰ gdy przyjmiemy, że pochodne $\frac{df}{da_1}, \ldots, \frac{df}{da_n}$ nie są równe zeru, ustanawiając między ilościami $a_1, \ldots, a_n$ jakąkolwiek liczbę dowolnych związków; albowiem gdy wyrugujemy pochodne $\frac{df}{da_1}, \ldots, \frac{df}{da_n}$ między temi równaniami, natenczas wypadnie:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{da_1}{dx_1}, & \frac{da_2}{dx_1}, & \dots, & \frac{da_n}{dx_1} \\ \frac{da_1}{dx_2}, & \frac{da_2}{dx_2}, & \dots, & \frac{da_n}{dx_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{da_1}{dx_n}, & \frac{da_2}{dx_n}, & \dots, & \frac{da_n}{dx_n} \end{vmatrix} = 0,$$

zkąd wnosimy, że ilości $a_1, a_2, \dots, a_n$ uważane jako funkcyje zmiennych $x_1, \dots, x_n$ nie są między sobą niezależne.

W pierwszym przypadku oznaczywszy z równań (5) wartości na $a_1, \dots, a_n$ w funkcyji $x_1, \dots, x_n$ i podstawiwszy te wartości w rozwiązaniu zupełném (1) równania (3), otrzymamy rozwiązanie osobliwe.

W drugim przypadku otrzymamy całkę ogólną, jak następuje.

3. Załóżmy że i pierwszych ilości $a_1, \dots, a_i$ są funkcyjami pozostałych $n-i$ ilości $a_{i+1}, \dots, a_n$; mianowicie:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= \varphi_1 (a_{i+1}, \dots, a_n), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_i &= \varphi_i (a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned} \right.$$

W tym przypadku są równania (4), determinujące ilości $a_1, \dots, a_n$ jako funkcyje zmiennych $x_1, \dots, x_n$, między sobą zależne i powinny się zredukować do $n-i$ różnych między sobą.

Istotnie podstawiając w równaniu (1) za $a_1, \dots, a_i$ powyższe funkcyje, różniczkując następnie to równanie cząstkowo względem każdéj z niezależnych $x_1, \dots, x_n$ otrzymamy n równań:

$$p_1 = \frac{df}{dx_1} + \left(\frac{df}{da_{i+1}}\right) \frac{da_{i+1}}{dx_1} + \dots + \left(\frac{df}{da_n}\right) \frac{da_n}{dx_1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$p_n = \frac{df}{dx_n} + \left(\frac{df}{da_{i+1}}\right) \frac{da_{i+1}}{dx_n} + \dots + \left(\frac{df}{dx_n}\right) \frac{da_n}{dx_n},$$

gdzie nawiasy oznaczają, że przed różniczkowaniem należy podstawić za $a_1, \ldots, a_i$ wartości (7).

Aby jednak kształt tych równań nie różnił się od kształtu równań (2) musi być:

$$\left(\frac{df}{da_{i+1}}\right)\frac{da_{i+1}}{dx_1} + \ldots + \left(\frac{df}{da_n}\right)\frac{da_n}{dx_1} = 0\,,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\left(\frac{df}{da_{i+1}}\right)\frac{da_{i+1}}{dx_n} + \ldots + \left(\frac{df}{da_n}\right)\frac{da_n}{dx_n} = 0\,,$$

Te równania są zupełnie równoważne równaniom (4). Mnożąc atoli te równania odpowiednio przez $dx_1, \ldots, dx_n$ i dodając iloczyny otrzymamy równanie:

$$\left(\frac{df}{da_{i+1}}\right)da_{i+1} + \ldots + \left(\frac{df}{da_n}\right)da_n = 0\,,$$

które z powodu niezależności ilości $a_{i+1}, \ldots, a_n$ rozkłada się na $n-i$ następujących:

$$(8) \qquad \left(\frac{df}{da_{i+1}}\right) = 0\,, \ldots ; \left(\frac{df}{da_n}\right) = 0\,.$$

W skutku równań (7) zamienia się rozwiązanie zupełne (1) na:

$$(9) \qquad x = f(x_1, \ldots, x_n \cdot \varphi_1, \ldots, \varphi_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Jeżeli przeto między równaniami (8), (9) wyrugujemy $n-i$ ilości $a_{i+1}, \ldots, a_n$ otrzymamy także rozwiązanie równania różniczkowego (3).

Ponieważ od naszéj woli zależy, ile z ilości $a_1, \ldots a_n$ chcemy uważać za funkcyje wszystkich innych, przeto tym sposobem otrzymamy cały szereg rozwiązań z danego rozwiązania zupełnego. Te rozwiązania nazwał Lagrange całkami ogólnemi. Najogólniejsze będzie to, które otrzymamy uważając jednę z ilości $a_1, \ldots, a_n$ za funkcyją wszystkich innych. Ponieważ nadto te funkcyje są zupełnie dowolnemi, przeto każda z tych całek ogólnych jest źródłem nieskończenie wielu rozwiązań szczególnych.

4. Zachodzi jeszcze pytanie czy *każde* szczególne rozwiązanie mieści się w tych ogólnych całkach, albo, ściśléj mówiąc,

czy z danego rozwiązania zupełnego otrzymamy wszystkie możebne rozwiązania, uznając stałe dowolne za funkcyje zmiennych niezależnych. Nie trudno okazać, że tak jest w saméj rzeczy.

Niech bowiem będzie:

$$(10) \qquad x = \chi(x_1, \ldots, x_n),$$

jakiémkolwiek rozwiązaniem równania (3), którego rozwiązanie zupełne jest

$$(11) \qquad x = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots a_n).$$

Ponieważ te dwa wyrażenia są rozwiązaniami równania (3), przeto jest identycznie:

$$F\left(f, x_1, \ldots, x_n, \frac{df}{dx_1}, \ldots, \frac{df}{dx_n}\right) = 0,$$

i

$$F\left(\chi, x_1, \ldots, x_n, \frac{d\chi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\chi}{dx_n}\right) = 0,$$

zkąd czytamy, że gdy oznaczymy ilości $a_1, \ldots, a_n$ jako funkcyje zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ tak, aby miały miejsce którekolwiek n z pomiędzy $n+1$ równań:

$$(12) \qquad f = \chi, \frac{df}{dx_1} = \frac{d\chi}{dx_1}, \ldots, \frac{df}{dx_n} = \frac{d\chi}{dx_n},$$

wtedy także $(n+1)^e$ będzie miało miejsce. Oznaczywszy zatem te ilości z n ostatnich i podstawiwszy wartości w pierwszém, otrzymamy równanie identyczne, które różniczkowane cząstkowo względem $x_1, \ldots, x_n$ daje

$$\frac{df}{dx_1} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_1} + \ldots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_1} = \frac{d\chi}{dx_1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{df}{dx_n} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_n} + \ldots + \frac{df}{dx_n}\frac{da_n}{dx_n} = \frac{d\chi}{dx_n}.$$

Atoli z powodu (12) dają te równania:

$$\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_1}+\ldots+\frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_1}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx_n}+\ldots+\frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dx_n}=0.$$

Ponieważ ostatnie równania nie są czém inném, tylko równaniami (4), przeto wnosimy ztąd, że jakiekolwiek rozwiązanie (10) może być otrzymane z rozwiązania zupełnego i to tylko sposobem wyłożonym w artykule trzecim.

Wniosek. Jeżeli z równań (12) wypadną na $a_1, \ldots, a_n$ wartości stałe, wtedy rozwiązanie (10) będzie szczególnym przypadkiem rozwiązania zupełnego. Jeżeli te wartości będą funkcyjami ilości $x_1, \ldots, x_n$ i nadto niektóre będą funkcyjami wszystkich innych, wtedy rozwiązanie (10) będzie szczególnym przypadkiem jednego z rozwiązań ogólnych dających się wyprowadzić z rozwiązania zupełnego. Nareszcie gdy wartości wypadną zmienne, ale między sobą niezależne, wtedy rozwiązanie (10) będzie rozwiązaniem osobliwém.

Uwaga. Równaniom (4) można także uczynić zadość przyrównywając ilości $a_1, \ldots, a_n$ do dowolnych funkcyj innych ilości stałych. Zatem z jednego rozwiązania można nieskończenie wiele innych rozwiązań zupełnych otrzymać.

5 Najlepszy sposób rugowania ilości stałych z danego równania skończonego celem otrzymania równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0, rzucający zarazem światło na odwrotne zagadnienie, mianowicie na wynajdywanie rozwiązania zupełnego, jest następujący.

Rozwiążmy dane równanie skończone między $n+1$ zmiennemi $x, x_1, \ldots, x_n$, zawierające n stałych dowolnych $a_1, \ldots, a_n$ względem jednéj stałéj a_1, t. j. przedstawmy je pod postacią:

$$(13) \qquad f(x, x_1, \ldots, x_n, a_2, \ldots, a_n) = a_1 .$$

Uważając x za zależną, $x_1, \ldots, x_n$ za niezależne, różniczkujmy to równanie (13) cząstkowo względem każdéj z niezależnych; tym sposobem otrzymamy n równań:

$$(14)\quad \begin{cases} f_1(x, x_1, .., x_n, p_1, a_2, .., a_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x, x_1, .., x_n, p_n, a_2, .., a_n) = 0. \end{cases}$$

Z tych n równań otrzymamy najprzód po wyrugowaniu $n-1$ stałych $a_2, .., a_n$, równanie o cząstkowych pochodnych rzędu pierwszego:

$$(15)\quad F_1(x, x_1, .., x_n, p_1, .., p_n) = 0,$$

i nadto oznaczymy każdą z tych $n-1$ stałych w funkcyji ilości $x, x_1, .., x_n, p_1, .., p_n$, t. j. znajdziemy

$$(16)\quad \begin{cases} F_2(x, x_1, .., x_n, p_1, .., p_n) = a_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n(x, x_1, .., x_n, p_1, .., p_n) = a_n. \end{cases}$$

Równania (15), (16) są zupełnie równoważne równaniom (14), które otrzymaliśmy różniczkując cząstkowo względem każdéj niezależnéj równanie (1), będące zupełném rozwiązaniem równania (15).

Ztąd wynika, że gdy z równań (15), (16) oznaczymy ilości $p_1, .., p_n$ w funkcyji ilości $x, x_1, .., x_n, a_2, .., a_n$ i te wartości podstawimy w równaniu

$$(17)\quad dx = p_1\,dx_1 + .. + p_n\,dx_n,$$

wtedy to równanie winno być całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego, a całka tego równania winna być niczém innéм, jedno równaniem (13), które jest rozwiązaniem zupełném równania o cząstkowych pochodnych (15).

Aby więc wynaleźć rozwiązanie zupełne równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 t. j. równania (15), dość wynaleźć $n-1$ równań między ilościami $x, x_1, .., x_n, p_1, .., p_n$ kształtu (16), które wraz z danèm równaniem różniczkowém (15) dają wartości na $p_1, .., p_n$, robiące równanie (17) całkowalném pod postacią jednego równania pierwotnego. Ponieważ równania (16) zawierają $n-1$ stałych dowolnych, a całkowanie równania (17) wprowadza jeszcze jednę stałą, przeto tym sposobem daje całkowanie równania (17) żądane rozwiązanie zupełne.

Warunki całkowalności równania (17) winny dać sposób oznaczenia funkcyj $F_2, .., F_n$, które przyrównane do dowol-

nych stałych $a_2, \ldots, a_n$ są szukanemi $n-1$ równaniami. Jak najdogodniéj urządzić rachunek celem wynalezienia tych funkcyj, mówić będziemy w następującym rozdziale; wprzódy zaś wyłożymy metodę Pfaffa i metodę Cauchy'ego, którą powtórnie Jacobi wynalazł.

6. Pfaff sprowadził całkowanie równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 do zagadnienia, wyłożonego w rozdziale I, mianowicie do całkowania równania różniczkowego rzędu 1^0 i linijowego, między $2\,n$ zmiennemi, pod postacią n równań pierwotnych z n stałemi dowolnemi.

Wyobraźmy sobie bowiem dane równanie o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 (15), rozwiązane względem jednéj pochodnéj p_n, t. j. przedstawmy je pod postacią:

$$(18) \qquad p_n = \varphi\,(x, x_1, \ldots, x_n \,.\, p_1, \ldots, p_{n-1}).$$

Podstawiwszy tę wartość w równaniu (17) otrzymamy równanie:

$$-\,dx + p_1\,dx_1 + \ldots + p_{n-1}\,dx_{n-1} + \varphi\,dx_n = 0,$$

które, uważając $p_1, \ldots, p_{n-1}$ za nowe zmienne, można tak pisać:

$$(19) \quad -dx+p_1\,dx_1+\ldots+p_{n-1}\,dx_{n-1}+\varphi\,dx_n+0.\,dp_1+\ldots+0.\,dp_{n-1}=0.$$

To równanie jest zupełnie tego samego kształtu, co równanie (1) w rozdziale 1 i wyniknie z tego ostatniego, gdy położymy w niém:

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} m=2\,n-1,\ X=-1,\ X=p_1, \ldots, X_{n-1}=p_{n-1},\ X_n=\varphi, \\ \qquad\qquad\qquad X_{n+1}= \ldots\ldots = X_{2n-1}=0, \\ \text{i} \quad x=x,\ x_1=x_1, \ldots, x_{n-1}=x_{n-1},\ x_n=x_n, \\ \qquad\qquad x_{n+1}=p_1 \ldots\ldots x_{2n-1}=p_{n-1} \end{array} \right.$$

Jeżeli więc to równanie (19) zcałkujemy pod postacią n równań pierwotnych z n dowolnemi stałemi, znajdziemy n równań między ilościami $x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, zawierających n stałych dowolnych; a gdy między temi równaniami wyrugujemy $n-1$ ilości $p_1, \ldots, p_{n-1}$, wypadnie jedno równanie między ilościami $x, x_1, \ldots, x_n$ z n dowolnemi stałemi, które będzie żądaném rozwiązaniem zupełném.

Uważajmy np. równanie:

$$\text{(a)} \qquad x = p_1 p_2 \text{ lub } p_2 = \frac{x}{p_1}.$$

Równanie (19) zamienia się w tym przypadku na

$$\text{(b)} \qquad -dx + p_1\, dx_1 + \frac{x}{p_1}\, dx_2 + 0.\, dp_1 = 0.$$

Stosując do tego równania wzory 30 art. 7 rozdział I, otrzymamy:

$$\text{(c)} \qquad \frac{dx}{dx_2} = \frac{2x}{p_1},\ \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x}{p_1^2},\ \frac{dp_1}{dx_2} = 1,$$

zkąd:

$$\text{(d)} \qquad p_1 = x_2 + a_1,\quad x = a_2 (x_2 + a_1)^2,\quad x_1 = a_2\, x_2 + a_3,$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są stałe całkowania.

Podstawmy te wartości (d) w równaniu (b) uważając ilości a_1, a_2, a_3 jako nowe zmienne, tedy otrzymamy równanie tylko między temi nowemi zmiennemi:

$$\text{(e)} \qquad 2\, a_2\, da_1 + a_1\, da_2 - da_3 = 0.$$

To równanie (e) całkujemy pod postacią dwóch równań pierwotnych, gdyż pod postacią jednego nie jest całkowalném.

Kładąc zatem:

$$\text{(f)} \qquad a_1 = b,$$

gdzie b jest stałą dowolną, otrzymamy:

$$b\, da_2 - da_3 = 0,$$

zkąd:

$$\text{(g)} \qquad b\, a_2 - a_3 = a,$$

gdzie a jest drugą stałą dowolną.

Podstawiwszy w (f), (g) wartości na a_1, a_2, a_3 w funkcyji ilości x, x_1, x_2, p_1 z (d), otrzymamy dwa równania:

$$\text{(h)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = x_2 + b, \\ \dfrac{x}{p_1} = x_1 + a, \end{array} \right.$$

przedstawiające całkę równania (b). A gdy między ostatniemi równaniami wyrugujemy p_1, wypadnie:

$$(k) \qquad x = (x_1 + a)(x_2 + b),$$

jako całka równania różniczkowego (a).

Jestto rozwiązanie zupełne równania (a). Całkę ogólną otrzymamy zakładając $b = \varphi(a)$ i rugując a między równaniami:

$$(l) \qquad \begin{cases} 0 = (x_1 + a)[x_2 + \varphi(a)], \\ 0 = x_2 + \varphi(a) + (x_2 + a)\varphi'(a); \end{cases}$$

a całka osobliwa, będzie wypadkiem rugowania ilości a, b między równaniami:

$$x = (x_1 + a)(x_2 + b),$$

$$\frac{dx}{da} = x_2 + b = 0, \quad \frac{dx}{db} = x_1 + a = 0,$$

a więc:

$$(m) \qquad x = 0.$$

Uwaga. Rozwiązanie zupełne równania różniczkowego (a) otrzymamy także, podstawiając wartości na p_1, p_2 z (a), (d) t. j. $p_1 = x_2 + a_1$, $p_2 = \frac{x}{x_2 + a_1}$ w równaniu:

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2,$$

w skutku czego będzie:

$$(n) \qquad dx = (x_2 + a_1)\,dx_1 + \frac{x}{x_2 + a_1}\,dx_2,$$

i całkując to równanie, całkowalne pod postacią jednego równania pierwotnego. Równanie (n) nie różni się od równania (a), całkowanego w art. 3im rozdziału Igo, jego całka jest kształtu (k).

7. Cauchy a po nim Jacobi okazał, że pierwszy układ równań Pfaffa dość zcałkować, aby otrzymać rozwiązanie zupełne i całkę najogólniejszą równania o cząstkowych pochodnych rzędu I°.

Jeżeli w równaniach (25) art. 4° podstawimy wartości (20), natenczas otrzymamy dla równania (19) pierwszy układ równań Pfaffa, jak następuje:

$$-\frac{d\varphi}{dx}\,N\,\frac{dx_n}{dx}=-1$$

$$-\frac{d\varphi}{dx_1}\,N\,\frac{dx_n}{dx}+N\frac{dp_1}{dx}=p_1\;,\;-N\frac{dx_1}{dx}-\frac{d\varphi}{dp_1}N\frac{dx_n}{dx}=0,$$

$$\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot$$

$$-\frac{d\varphi}{dx_{n-1}}N\frac{dx_n}{dx}+N\frac{dp_{n-1}}{dx}=p_{n-1}\;,\;-N\frac{dx_{n-1}}{dx}-\frac{d\varphi}{dp_{n-1}}N\frac{dx_n}{dx}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}N+\frac{d\varphi}{dx_1}N\frac{dx_1}{dx}+\ldots+\frac{d\varphi}{dx_{n-1}}N\frac{dx_{n-1}}{dx}+\frac{d\varphi}{dp_1}N\frac{dp_1}{dx}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d\varphi}{dp_{n-1}}N\frac{dp_{n-1}}{dx}=\varphi.$$

Rugując między temi równaniami nieznaną N i biorąc x_n za niezależnie zmienną, otrzymamy $2n-1$ równań różniczkowych na obrachowanie podstawień, mianowicie:

$$(21)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dx_n}{dx}=\varphi-p_1\dfrac{d\varphi}{dp_1}-\ldots-p_{n-1}\dfrac{d\varphi}{dp_{n-1}}\,,\\[2ex] \dfrac{dx_1}{dx_n}=-\dfrac{d\varphi}{dp_1}\,,\quad\dfrac{dp_1}{dx_n}=\dfrac{d\varphi}{dx_1}+p_1\dfrac{d\varphi}{dx}\,,\\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\,,\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\[2ex] \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n}=-\dfrac{d\varphi}{dp_{n-1}}\,,\quad\dfrac{dp_{n-1}}{dx_n}=\dfrac{d\varphi}{dx_{n-1}}+p_{n-1}\dfrac{d\varphi}{dx}.\end{array}\right.$$

Zcałkowawszy ten układ równań całkowicie, otrzymamy $2n-1$ równań między zmiennemi $x, x_1, \ldots, p_{n-1}$, zawierających $2n-1$ stałych dowolnych $a, a_1, \ldots, a_{2n-2}$. Z tych równań otrzymamy podstawienia:

$$(22)\quad\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\psi\,(x_n\,,a\,,a_1\,,\ldots,a_{2n-2}),\\ x_1&=&\psi_1\,(x_n\,,a\,,a_1\,,\ldots,a_{2n-2}),\\ \cdot&\cdot&\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\\ x_{n-1}&=&\psi_{n-1}\,(x_n\,,a\,,a_1\,,\ldots,a_{2n-2}),\\ p_1&=&\psi_n\,(x_n\,,a\,,a_1\,,\ldots,a_{2n-2}),\\ \cdot&\cdot&\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\\ p_{n-1}&=&\psi_{2n-2}\,(x_n\,,a\,,a_1\,,\ldots,a_{2n-2}).\end{array}\right.$$

które, uważając ilości $a, a_1, \ldots, a_{2n-2}$ za nowe zmienne, zamienią równanie (19) na inne między temi nowemi zmiennemi. Atoli wprowadźmy zamiast stałych dowolnych $a, a_1, \ldots, a_{2n-2}$, które wchodzą bezpośrednio do całek układu równań (21), inne stałe, mianowicie wartości, które $x, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}$ przyjmą przy pewnéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj $x_n = \alpha_n$. Gdy te wartości oznaczymy odpowiednio przez $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ otrzymamy z (22) następujące związki między temi dwoma rodzajami ilości stałych:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \psi(\alpha_n \, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ \alpha_1 = \psi_1(\alpha_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n-1} = \psi_n(\alpha_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ \beta_1 = \psi_{2n-2}(\alpha_n, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ \cdot \quad \cdot \quad , \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_{n-1} = \psi_{2n-2}(\alpha_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}). \end{array} \right.$$

Jeżeli położymy ogólnie:

$$(24) \quad \psi_i(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}) - \psi_i(\alpha_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}) = \\ = \omega_i(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}),$$

skutkiem czego:

$$(25) \quad (\omega_i)_{x_n=\alpha_n} = 0, \left(\frac{d\omega_i}{da_k}\right)_{x_n=\alpha_n} = 0, \left[\begin{array}{l} i=0,1,\ldots,2n-2 \\ k=0,1,\ldots,2n-2 \end{array}\right]$$

tedy wzory (22) przyjmą postać:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + \omega(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ x_1 = \alpha_1 + \omega_1(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} + \omega_{n-1}(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ p_1 = \beta_1 + \omega_n(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{n-1} = \beta_{n-1} + \omega_{2n-2}(x_n, a, a_1, \ldots, a_{2n-2}). \end{array} \right.$$

Obrachujmy z wzorów (23) pierwotne stałe dowolne $a, a_1, \ldots, a_{2n-2}$ w funkcyji nowych stałych dowolnych $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$,

$\beta_1, \ldots, \beta_{1n-}$ (α_n jest liczbą szczególną), i podstawmy te wartości w (26), tedy będą zmienne $x, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}$ wyrażoue w funkcyji zmiennéj x_n i $2\,n-1$ nowych stałych dowolnych. Uważając te nowe stałe dowolne jako nowe ilości zmienne, podstawmy wartości (26) w równaniu (19), tedy lewa jego strona będzie:

$$(27)\qquad -d\,(\alpha+\omega)+(\beta_1+\omega_n)\,d\,(\alpha_1+\omega_1)+\ldots$$
$$\ldots+(\beta_{n-1}+\omega_{2n-2})\,d\,(\alpha_{n-1}+\omega_{n-1})+\varphi\,dx_n$$
$$=A\,d\alpha+A_1\,d\alpha_1+\ldots+A_{n-1}\,d\alpha_{n-1}+B_1\,d\beta_1+\ldots+B_{n-1}\,d\beta_{n-1}+R\,dx_n,$$

gdzie:

$$(28)\left\{\begin{aligned}
A &= -1-\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega}{da_k}\frac{da_k}{d\alpha}+(\beta_1+\omega_n)\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega_1}{da_k}\frac{da_k}{d\alpha}+\ldots\\
&\quad\ldots+(\beta_{n-1}+\omega_{2n-2})\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega_{n-1}}{da_k}\frac{da_k}{d\alpha},\\
A_i &= \beta_i+\omega_{n+i-1}-\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega}{da_k}\frac{da_k}{d\alpha_i}+(\beta_1+\omega_n)\sum_{k=0}^{k=n2-2}\frac{d\omega_1}{da_k}\frac{da_k}{d\alpha_i}+\ldots\\
&\quad\ldots+(\beta_{n-1}+\omega_{2n-2})\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega_{n-1}}{da_k}\frac{da_k}{d\alpha_i},\\
B_i &= \quad -\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega}{da_k}\frac{da_k}{d\beta_i}+(\beta_1+\omega_n)\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega_1}{da_k}\frac{da_k}{d\beta_i}+\ldots,\\
&\quad\ldots+(\beta_{n-1}+\omega_{2n-2})\sum_{k=0}^{k=2n-2}\frac{d\omega_{k-1}}{da_k}\frac{da_k}{d\beta_i}.\\
&\qquad [i=1,2,\ldots,n-1]
\end{aligned}\right.$$

Atoli podług twierdzenia Pfaffa (rozdział I, art. 4) winien być w (27) współczynnik przy dx_n identycznie równy zero:

$$R=0,$$

a współczynniki A, A_i, B_i nie powinny zawierać ilości x_n albo, gdy ją zawierają, to ta ilość powinna się znajdować w czynniku wspólnym wszystkim tym współczynnikom, zatem stosunki:

$$\frac{A_i}{A},\ \frac{B_i}{A}$$

winny być od x_n niezależne i posiadać tę samę wartość jakąkolwiek wartość na x_n naznaczymy.

Dla $x_n = \alpha_n$ wynika z (28) podług (25):

$$A = -1, \quad A_i = \beta_i, \quad B_i = 0,$$

zatem równanie (27) możemy tak pisać:

$$-dx + p_1\, dx_1 + .. + p_{n-1}\, dx_{n-1} + \varphi\, dx_n =$$
$$A\,(-d\alpha + \beta_1\, d\alpha_1 + .. + \beta_{n-1}\, d\alpha_{n-1}).$$

Ztąd czytamy, że gdy funkcyje $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_{n-1}, \beta_1, .., \beta_{n-1}$ zmiennych $x, x_1, .., x_{n-1}, x_n, p_1, .., p_{n-1}$ są takie, iż:

$$(29) \qquad d\alpha = \beta_1\, d\alpha_1 + .. + \beta_{n-1}\, d\alpha_{n-1},$$

wtedy będzie:

$$dx = p_1\, dx_1 + .. + p_{n-1}\, dx_{n-1} + \varphi\, dx_n.$$

Zatem całkowanie równania (19) sprowadza się do całkowania równania (29).

8. Równaniu (29) można uczynić zadość dwojakim sposobem: 1° kładąc:

$$d\alpha = 0, \quad d\alpha_1 = 0, .., d\alpha_{n-1} = 0,$$

t. j. uważając ilości $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_{n-1}$ za dowolne stałe;
2° uważając ilość α za funkcyją ilości $\alpha_1, .., \alpha_{n-1}$, której cząstkowe pochodne odpowiednio względem $\alpha_1, .., \alpha_{n-1}$ są $\beta_1, .., \beta_{n-1}$; t. j. kładąc:

$$(30) \quad \begin{cases} \alpha = \chi\,(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1}), \\ \beta_1 = \dfrac{d\chi}{d\alpha_1}, .., \beta_{n-1} = \dfrac{d\chi}{d\alpha_{n-1}}. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku rugując między równaniami (23), (26) ilości $a, a_1, .., a_{2n-2}, \beta_1, .., \beta_{n-1}$, otrzymamy n równań między $x, x_1', .., x_n, p_1, .., p_{n-1}$ z n stałemi dowolnemi $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_{n-1}$. Z tych n równań rugując $n-1$ ilości $p_1, .., p_{n-1}$ otrzymamy najprzód równanie:

$$(31) \qquad x = f\,(x_1, .., x_n, \alpha, \alpha_1, .., \alpha_{n-1}),$$

i nadto:

$$(32)\quad \begin{cases} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}). \end{cases}$$

Ponieważ te wartości (31), (32) sprawdzają identycznie równanie (19), przeto (31) jest rozwiązaniem tego równania i to rozwiązaniem zupełném.

W drugim przypadku wyrażając z równań (23), (26) ilości $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ w funkcyji ilości $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ x_n, $p_1, \ldots, p_{n-1}$ i podstawiając te wartości w (30) otrzymamy n równań między temi ostatniemi ilościami.

Te równania przedstawiają najogólniejszą całkę równania (19) lub (18).

Uszczególniając kształt dowolnéj funkcyji χ i rugując ilości $p_1, \ldots, p_{n-1}$ otrzymamy szczególne rozwiązanie.

Można także tak postąpić. Z równań (23) i pierwszych n równań (26) oznaczamy $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ w funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, te wartości podstawiamy następnie w równaniach (30). Rugowanie ilości $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ między temi równaniami daje przy szczególnym kształcie funkcyji χ rozwiązanie szczególne.

Aby objaśnić tę metodę przykładem uważajmy równanie:

$$(a)\qquad p_1\, p_2\, p_3 = x_1\, x_2\, x_3\,,$$

lub:

$$p_3 = \frac{x_1\, x_2\, x_3}{p_1\, p_2}\,.$$

Równania Pfaffa (21) są dla tego równania:

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dx_3} = \dfrac{3\, x_1\, x_2\, x_3}{p_1\, p_2}\,, \\ \dfrac{dx}{dx_3} = \dfrac{x_1\, x_2\, x_3}{p_1^2\, p_2}\,, \quad \dfrac{dp_1}{dx_3} = \dfrac{x_2\, x_3}{p_1\, p_2}\,, \\ \dfrac{dx_2}{dx_3} = \dfrac{x_1\, x_2\, x_3}{p_1\, p_2^2}\,, \quad \dfrac{dp_2}{dx_3} = \dfrac{x_1\, x_3}{p_1\, p_2}\,. \end{cases}$$

Celem łatwiejszego zcałkowania sprowadzamy te równania do następujących:

$$\frac{dp_1}{dx_1} = \frac{p_1}{x_1}, \quad \frac{dp_2}{dx_2} = \frac{p_2}{x_2}, \quad \frac{dx}{dx_1} = 3\, p_1, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{dx_1}{dx_3} = \frac{x_1\, x_2\, x_3}{p_1^2\, p_2}.$$

Całkowanie daje:

$$\text{(c)} \quad p_1 = c_1 x_1, \quad p_2 = c_2 x_2, \quad x = \frac{3}{2} c_1 x_1^2 + c_3, \quad c_2 x_2^2 = c_1^2 x_1^2 + c_4$$

$$c_1^2\, c_2\, x_1^2 = x_3^2 + c_5,$$

gdzie c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, są stałe całkowauia.

Gdy dla $x_3 = \alpha_3$ (α_3 jest liczbą szczególną) jest $x = \alpha$, $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $p_1 = \beta_1$, $p_2 = \beta_2$, wtedy z (c) wypadnie:

$$c_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad c_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad c_3 = \alpha - \frac{3}{2} \alpha_1 \beta_1, \quad c_4 = \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1,$$

$$c_5 = \frac{\beta_1^2\, \beta_2^2}{\alpha_2} - \alpha_3^2.$$

Podstawiwszy te wartości w (c) otrzymamy:

$$\text{(d)} \quad \left\{ \begin{aligned} & x - \alpha = \frac{3}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1} (x_1^2 - \alpha_1^2) \\ & \frac{\beta_1}{\alpha_1} (x_1^2 - \alpha_1^2) = \frac{\beta_2}{\alpha_2} (x_2^2 - \alpha_2^2) \\ & \frac{\beta_1^2\, \beta_2}{\alpha_1^2\, \alpha_2} (x_1^2 - \alpha_1^2) = x_3^2 - \alpha_3^2) \\ & \frac{p_1}{x_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \\ & \frac{p_2}{x_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{aligned} \right.$$

Po wyrugowaniu ilości $p_1, p_2, \beta_1, \beta_2$ z pomiędzy tych pięciu równań (d) otrzymamy zupełne rozwiązanie równania (a).

$$\text{(c)} \quad (x - \alpha)^3 = \frac{27}{8} (x_1^2 - \alpha_1^2)(x_2^2 - \alpha_2^2)(x_3^2 - \alpha_3^2).$$

z trzema dowolnemi α, α_1, α_2 (α_3 jest liczbą szczególną).

Gdy przyjmiemy że α jest dowolną funkcyją dwóch pozostałych dowolnych α_1, α_2, np. $\alpha = \chi(\alpha_1, \alpha_2)$, natenczas będzie podług art. 3° całka najogólniejsza przedstawioną przez trzy równania:

$$
\text{(f)}\quad \begin{cases}
x = \chi(\alpha_1, \alpha_2) + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x_1^2-\alpha_1^2)(x_2^2-\alpha_2^2)(x_3^2-\alpha_3^2)}, \\[2ex]
0 = \dfrac{d\chi}{d\alpha_1} - \alpha_1 \sqrt[3]{\dfrac{(x_2^2-\alpha_2^2)(x_3^2-\alpha_3^3)}{(x_1^2-\alpha_1^2)^2}}, \\[2ex]
0 = \dfrac{d\chi}{d\alpha_1} - \alpha_2 \sqrt[3]{\dfrac{(x_1^2-\alpha_1^2)(x_3^2-\alpha_3^2)}{(x_2^2-\alpha_2^2)^2}}.
\end{cases}
$$

Do tego samego wypadku dojdziemy za pomocą metody Cauchy'ego. Albowiem oznaczając z trzech pierwszych równań (d) ilości α, β_1, β_2 w funkcyji ilości $x, x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2$ otrzymamy:

$$
\text{(g)}\quad \begin{cases}
\alpha = x - \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x_1^2-\alpha_1^2)(x_2^2-\alpha_2^2)(x_3^2-\alpha_3^2)}, \\[2ex]
\beta_1 = \alpha_1 \sqrt[3]{\dfrac{(x_2^2-\alpha_2^2)(x_3^2-\alpha_3^2)}{(x_1^2-\alpha_1^2)^2}}, \\[2ex]
\beta_2 = \alpha_2 \sqrt[3]{\dfrac{(x_1^2-\alpha_1^2)(x_3^2-\alpha_3^2)}{(x_2^2-\alpha_2^2)^2}};
\end{cases}
$$

a gdy te wartości podstawimy w równaniach:

$$
\alpha = \chi(\alpha_1, \alpha_2), \quad \beta_1 = \frac{d\chi}{d\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{d\chi}{d\alpha_2}
$$

otrzymamy równania (f).

ROZDZIAŁ CZWARTY.

O METODZIE JACOBIEGO CAŁKOWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O CZĄSTKOWYCH POCHODNYCH RZĘDU 1-go.

1. Jacobiego ostatnia metoda jest uogólnieniem metody, którą podał Lagrange dla przypadku, gdy równanie o cząstkowych pochodnych zawiera trzy ilości zmienne; dlatego wyłożymy przedewszystkiem metodę Lagrange'a.

Niechaj daném będzie równanie o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 między trzema zmiennemi x, x_1, x_2, z których pierwsza jest zależną a dwie ostatnie niezależne; t. j. równanie:

$$(1) \qquad F_1(x, x_1, x_2, p_1 \, p_2) = 0.$$

Celem wynalezienia rozwiązania zupełnego tego równania potrzeba (art. 14) wynaleźć równanie między ilościami x, x_1, x_2, p_1, p_2, zawierające jedną stałą dowolną a_2 kształtu:

$$(2) \qquad F_2(x, x_1, x_2, p_1, p_2) = a_2,$$

któreby łącznie z równaniem (1) dało na p_1, p_2 wartości w funkcyji x, x_1, x_2, robiące równanie:

$$(3) \qquad dx = p_1 \, dx_1 + p_2 \, dx_2$$

całkowalném. Całka tego równania będzie żądaném rozwiązaniem zupełném.

Równanie (3) rzędu 1^0 i linijowe, między trzema zmiennemi, będzie całkowalne, jeżeli ilości p_1, p_2, oznaczone jako funkcyje ilości x, x_1, x_2, dopełnią warunku:

$$(0, 1, 2) = 0,$$

t. j. gdy będzie identycznie:

$$(4) \qquad -\left[\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) - \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)\right] + p_1\left(\frac{dp_2}{dx}\right) - p_2\left(\frac{dp_1}{dx}\right) = 0.$$

Nawiasy oznaczają, że uważamy p_1, p_2 jako funkcyje samych ilości x, x_1, x_2.

Ponieważ dane równanie (1) daje p_1 w funkcyji ilości x, x_1, x_2, p_2, rozwiązawszy bowiem to równanie względem p_1 otrzymamy:

$$(5) \qquad p_1 = \varphi\,(x, x_1, x_2, p_2),$$

przeto potrzeba jeszcze tylko oznaczyć p_2 w funkcyji x, x_1, x_2 zgodnie z warunkiem (4). Podstawiwszy wartość (5) na p_1 w równaniu (4) i zważywszy że podług tego równania:

$$\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) = \frac{dp_1}{dx_2} + \frac{dp_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right), \quad \left(\frac{dp_1}{dx}\right) = \frac{dp_1}{dx} + \frac{dp_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx}\right),$$

tedy otrzymamy na oznaczenie p_2 w funkcyji ilości x, x_1, x_2, równanie o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 i linijowe:

$$(6) \qquad \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) - \frac{dp_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right) + \left(p_1 - p_2\frac{dp_1}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx}\right) = \frac{dp_1}{dx_2} + p_2\frac{dp_1}{dx}$$

między czterema zmiennemi x, x_1, x_2, p_2.

Którekolwiek rozwiązanie tego równania lub, co jedno, jedna z całek równań Lagrange'a:

$$(7) \qquad dx_1 = \frac{dx_2}{-\frac{dp_1}{dp_2}} = \frac{dx}{p_1 - p_2\frac{dp_1}{dp_2}} = \frac{dp_2}{\frac{dp_1}{dx_2} + p_2\frac{dp_1}{dx}}$$

da nam żądaną wartość na p_2 w funkcyji ilości x, x_1, x_2 z jedną dowolną stałą. Podstawiwszy tę wartość w (5) otrzymamy także p_1 w funkcyji ilości x, x_1, x_2; a gdy nareszcie te wartości

na p_1, p_2 podstawimy w równaniu (3), otrzymamy równanie całkowalne, którego całka będzie żądaném rozwiązaniem zupełném.

Nie trudno zauważyć że równania Legrange'a (7) dla równania linijowego (6) nie różnią się wcale od pierwszego układu równań Pfaffa.

Jeżeli przeto zważymy, że metoda Cauchy'ego wymaga zupełnego zcałkowania tego układu równań, a metoda Lagrange'a wymaga wynalezienia tylko jednéj całki z jedną dowolną stałą, pojmiemy o ile ostatnia metoda jest dogodniejszą.

2. Metoda Lagrange'a jeszcze jest prostszą, jeżeli równanie dane nie zawiera wyraźnie zależnéj x, zatem gdy jest kształtu:

$$(8) \qquad F_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = 0,$$

wtedy bowiem potrzeba jeszcze znaleźć drugie równanie między ilościami x_1, x_2, p_1, p_2 z jedną dowolną stałą a_2, kształtu:

$$(9) \qquad F_2(x_1, x_2, p_1, p_2) = a_2,$$

któreby dało łącznie z (8) na p_1, p_2 wartości w funkcyji x_1, x_2 robiące wyrażenie:

$$(10) \qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2$$

pełną różniczką funkcyji ilości x_1, x_2; co gdy znajdziemy, wtedy będzie:

$$(11) \qquad x = \int (p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2)$$

żądaném rozwiązaniem zupełném równania (8).

Wyrażenie (10) będzie pełną różniczką gdy p_1, p_2, oznaczone jako funkcyje ilości x_1, x_2 czynią zadość równaniu:

$$(12) \qquad \left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) - \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) = 0,$$

Ponieważ równanie (8) daje:

$$(13) \qquad p_1 = \varphi(x_1, x_2, p_2)$$

przeto gdy tę wartość podstawimy w (12) i zważymy że podług (13):

$$\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) = \frac{dp_1}{dx_2} + \frac{dp_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right),$$

otrzymamy na oznaczenie p_2 w funkcyji x_1, x_2 równanie o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 linijowe:

$$(14) \qquad \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) - \frac{dp_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right) = \frac{dp_1}{dx_2},$$

między trzema zmiennemi p_2, x_1, x_2. Równania Lagrange'a są w tym przypadku:

$$(15) \qquad dx_1 = \frac{dx_2}{-\frac{dp_1}{dp_2}} = \frac{dp_2}{\frac{dp_1}{dx_2}}.$$

Gdy znajdziemy jednę całkę układu dwóch zwykłych równań (15), wyznaczymy z niéj p_2 w funkcyji x_1, x_2; tę wartość podstawimy w (13) i otrzymamy także p_1 w funkcyji ilości x_1, x_2; a gdy nareszcie te wartości na p_1, p_2 podstawimy w (12) i wykonamy kwadraturę, otrzymamy żądane rozwiązanie zupełne równania (8).

Jako przykład uważajmy równanie:

$$(a) \qquad x(1 + p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

zkąd

$$(b) \qquad p_1 = (x^{-2} - 1 - p_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ

$$\frac{dp_1}{dx_2} = 0, \qquad \frac{dp_1}{dx} = -x^{-3}(x^{-2} - 1 - p_2^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dp_1}{dp_2} = -p_2(x^{-2} - 1 - p_2^2)^{-\frac{1}{2}},$$

przeto, gdy te wartości podstawimy w równaniach Lagrange'a (7) i jednocześnie przez $(x^{-2} - 1 - p_2^2)^{-\frac{1}{2}}$ pomnożymy, otrzymamy:

$$(c) \qquad \frac{dx_1}{(x^{-2} - 1 - p_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx_2}{p_2} = -\frac{dx}{x^{-2} - 1} = -\frac{x^3\,dp_2}{p_2}.$$

Dwa ostatnie wyrazy dają:

$$(d) \qquad \frac{dp_2}{p_2} = \frac{dx}{x^3 - x},$$

zkąd po z całkowaniu:

$$(e) \qquad p_2 = \frac{c\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

a następnie podług (*b*):

$$(f) \qquad p_1 = \frac{(1 - c^2)^{\frac{1}{2}}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}.$$

Podstawiwszy te wartości w równaniu $dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2$, otrzymamy:

$$(g) \qquad \frac{x\,dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1 - c^2)^{\frac{1}{2}}\,dx_1 + c\,dx_2,$$

zkąd:

$$(h) \qquad (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = c' - (1 - c^2)^{\frac{1}{2}}\,x_1 - c\,x_2$$

To jest zupełne rozwiązanie równania (*a*) z dwiema stałemi c, c', które weszły przy całkowaniu równań (*d*), (*g*).

Odpowiednia całka ogólna będzie zaś:

$$(k) \qquad \begin{cases} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \varphi\,(c) - (1 - c^2)^{\frac{1}{2}}\,x_1 - c\,x_2 \\ 0 = \varphi'\,(c) + c\,(1 - c^2)^{-\frac{1}{2}}\,x_1 - x_2, \end{cases}$$

gdzie φ jest dowolną funkcyją.

Zalety téj metody Lagrange'a, tak prostéj i tak naturalnie wynikającéj z właściwości równania o cząstkowych pochodnych, były powodem, że Jacobi nie poprzestał na swéj dawniejszéj metodzie, lecz usiłował metodę Lagrange'a rozszerzyć do równań, zawierających ilekolwiek zmiennych.

Ponieważ przedstawienie téj ostatniéj pracy Jacobiego znacznie się uprości, gdy przyjmiemy, że dane równanie o cząstkowych pochodnych nie zawiera wyraźnie zmiennéj zależnéj, przeto niech będzie dane równanie kształtu:

$$(16) \qquad F_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

To przyjęcie nie zmniejszy ogólności badania, albowiem do tego kształtu można każde równanie sprowadzić przez powiększenie liczby niezależnie zmiennych.

Albowiem gdy mamy równanie:

$$\Phi(x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

wtedy wprowadzając nową niezależną x_{n+1} i nową zależną za pomocą podstawienia:

$$y = x_{n+1}\, x,$$

i zważając że:

$$\frac{dy}{dx_{n+1}} = x, \quad \frac{1}{x_{n+1}} \frac{dy}{dx_1} = p_1, \ldots, \frac{1}{x_{n+1}} \frac{dy}{dx_n} = p_n,$$

otrzymamy równanie kształtu (16):

$$\Phi\left(\frac{dy}{dx_{n+1}}, x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{x_{n+1}} \frac{dy}{dx_1}, \ldots, \frac{1}{x_{n+1}} \frac{dy}{dx_n}\right) = 0,$$

między $n+1$ niezależnemi, lecz nie zawierające wyraźnie zależnéj y.

Aby wynaleźć rozwiązanie zupełne równania (16), trzeba wynaleźć $n-1$ funkcyj ilości $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ które przyrównane do dowolnych stałych dają $n-1$ równań:

$$(17) \quad \begin{cases} F_2(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_n, \end{cases}$$

takich, aby wartości na $p_1, \ldots, p_n$ w funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n$, obrachowane z tych równań i danego równania (16) zrobiły wyrażenie:

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n$$

pełną różniczką.

To wyrażenie będzie pełną różniczką funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n$, jeżeli ilości $p_1, \ldots, p_n$, uważane jako funkcyje tych ilości, dopełnią $\frac{n(n-1)}{2}$ warunków, które otrzymamy z jednego:

$$(18) \qquad (i, k) = \left(\frac{dp_i}{dx_k}\right) - \left(\frac{dp_k}{dx_i}\right) = 0,$$

kładąc za i, k wszystkie różne kombinacyje z szeregu liczb $1, 2, .., n$.

Ponieważ dane równanie (16) oznacza p_1 w funkcyji $p_2, .., p_n$, $x_1, .., x_n$ przeto do rozwiązania zagadnienia potrzeba $n-1$ ilości $p_2, .., p_n$ oznaczyć w funkcyji ilości $x, .., x_n$. Atoli na to oznaczenie mamy $\frac{n(n-1)}{2}$ równań warunkowych; ta liczba równań warunkowych jest z wyjątkiem przypadku, gdy $n=2$, zawsze większą od liczby ilości mających się oznaczyć; zachodzi więc pytanie, czy można uczynić zadość tym $\frac{n(n-1)}{2}$ warunkom przez mniejszą liczbę ilości. To pytanie zadawali sobie przez pół wieku matematycy, lecz dopiero Jacobiemu udało się rozwiązać je w sposób zupełnie zadowalniający.

4. Przedewszystkiem pytamy się, jaki związek zachodzić powinien między funkcyjami $F_1, F_2, .., F_n$, aby wartości na $p_1, .., p_n$, obrachowane z równań (16), (17), dopełniły warunków (18). Okażemy, że te funkcyje $F_1, F_2, .., F_n$ winny sprawdzić identycznie $\frac{n(n-1)}{2}$ równań, które z jednego:

$$(19) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{dF_\alpha}{dp_k} \frac{dF_\beta}{dx_k} - \frac{dF_\alpha}{dx_k} \frac{dF_\beta}{dp_k} \right\} = 0, \text{*)}$$

otrzymamy, kładąc za α, β wszystkie różne kombinacyje z szeregu liczb $1, 2, .., n$, i które symbolicznie tak pisać będziemy:

$$(20) \qquad (F_\alpha, F_\beta) = 0.$$

Uważajmy bowiem którekolwiek dwa z pomiędzy równań (16), (17):

$$F_\alpha = a_\alpha, \quad F_\beta = a_\beta.$$

---

*) Jeżeli funkcyje $F_1, F_2, .., F_n$ zawierają wyraźnie zależną x, wtedy warunek (19) należy zastąpić warunkiem:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{dF_\alpha}{dp_k} \left(\frac{dF_\beta}{dx_k} + p_k \frac{dF_\beta}{dx} \right) - \left(\frac{dF_\alpha}{dx_k} + p_k \frac{dF_\alpha}{dx} \right) \frac{dF_\beta}{dp_k} \right\} = 0.$$

Jeżeli ze wszystkich n równań (16), (17) wyobrazimy sobie ilości $p_1, \ldots, p_n$ obrachowane w funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n$, i te wartości podstawimy w dwóch powyższych równaniach, tedy te równania zamienią się na tożsamości. Różniczkując przeto w tém przypuszczeniu pierwsze względem x_i, a drugie względem x_k otrzymamy:

$$\frac{dF_\alpha}{dx_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_k}\left(\frac{dp_k}{dx_i}\right) = 0,$$

$$\frac{dF_\beta}{dx_k} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF_\beta}{dp_i}\left(\frac{dp_i}{dx_k}\right) = 0.$$

Mnożąc następnie pierwsze z tych dwóch ostatnich równań przez $\frac{dF_\beta}{dp_i}$ i sumując względem i od $i=1$ do $i=n$, a drugie mnożąc przez $\frac{dF_\alpha}{dp_k}$ i sumując względem k od $k=1$ do $k=n$, znajdziemy:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF_\alpha}{dx_i}\frac{dF_\beta}{dp_i} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_k}\frac{dF_\beta}{dp_i}\left(\frac{dp_k}{dx_i}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_k}\frac{dF_\beta}{dx_k} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_k}\frac{dF_\beta}{dp_i}\left(\frac{dp_i}{dx_k}\right) = 0;$$

a gdy nareszcie odejmiemy od siebie dwa ostatnie równania zamieniwszy wprzód skazówkę i na k w pojedynczéj sumie pierwszego równania, tedy wypadnie:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{dF_\alpha}{dp_k}\frac{dF_\beta}{dx_k} - \frac{dF_\alpha}{dx_k}\frac{dF_\beta}{dp_k}\right\} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_k}\frac{dF_\beta}{dp_i}\left\{\left(\frac{dp_i}{dx_k}\right) - \left(\frac{dp_k}{dx_i}\right)\right\} = 0,$$

lub gdy wprowadzimy symbole (18), (20):

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_k}\frac{dF_\beta}{dp_i}(i, k) + (F_\alpha, F_\beta) = 0.$$

Z tego równania czytamy bezpośrednio, że gdy wartości na $p_1, \ldots, p_n$, obrachowane w funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n$, sprawdzają identycznie warunki (20), wtedy funkcyje $F_1, \ldots, F_n$ sprawdzą identycznie warunki (20), albowiem gdy jest $(i, k) = 0$, wtedy równanie (21) sprowadzi się do $(F_\alpha, F_\beta) = 0$.

5. Okażemy teraz, że gdy nawzajem funkcyje F_α, F_β sprawdzają warunek (20), wtedy ilości $p_1, .., p_n$, z równań (16), (17) obrachowane w funkcyji ilości $x_1, .., x_n$, sprawdzą warunki (18).

Tym celem trzeba równania (21) rozwiązać względem (i, k).

Zamieniając najprzód skazówki α, β między sobą i zważając że ogólnie $(F_\beta, F_\alpha) = -(F_\alpha, F_\beta)$, możemy równanie (21) także tak pisać:

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_\alpha}{dp_i} \frac{dF_\beta}{dp_k} (i, k) = (F_\alpha, F_\beta).$$

W podwójnéj sumie po lewéj stronie tego równania znajduje się n^2 wyrazów; atoli n wyrazów jest równych zeru, mianowicie te wyrazy, które odpowiadają równym wartościom skazówek i, k, gdyż ogólnie $(i, i) = 0$; pozostałe $n\,(n-1)$ wyrazów mają po dwa, odpowiadające téj saméj kombinacyji skazówek (ik) (ki) czynnik (i, k) równy liczebnie a przeciwny co do znaku, bo $(i, k) = -(k, i)$. Rozumiejąc przeto przez ik same różne kombinacyje z szeregu liczb $1, 2, .., n$, możemy równanie (22) także tak pisać:

$$(22b) \qquad \Sigma_i\, \Sigma_k \left\{ \frac{dF_\alpha}{dp_i} \frac{dF_\beta}{dp_k} - \frac{dF_\alpha}{dp_k} \frac{dF_\beta}{dp_i} \right\} (i, k) = (F_\alpha, F_\beta).$$

Takich równań między ilościami $F_1, F_2, .., F_n$ istnieje $\frac{n\,(n-1)}{2}$ to jest tyle, ile jest różnych kombinacyj ik i $\alpha\beta$. Te równania są linijowe względem wyrażeń (i, k); drugie ich strony są różnemi wyrażeniami (F_α, F_β). Zatem jeżeli funkcyje $F_1, .., F_n$ dopełnią wszystkich warunków (20), natenczas ilości $p_1, .., p_n$, dopełnią wszystkich warunków (18), jeżeli tylko determinant złożony ze współczynników tych $\frac{n\,(n-1)}{2}$ równań linijowych (22b) nie jest równy zeru, gdyż w tym przypadku wyrażenia (i, k) obrachowane z (22b) przedstawiłyby się pod postacią nieoznaczoną $\frac{0}{0}$. Że ten przypadek wyjątkowy nie ma miejsca, okażemy jak następuje.

Dla uproszczenia rachunku połóżmy:

$$\frac{dF_\alpha}{dp_i} = a_i^\alpha,$$

i oznaczmy przez R determinant z n^2 wyrazów a_i^α, gdzie $i=1,2,..,n$, $\alpha=1, 2, . . , n$ t. j. niech będzie:

$$R = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \,..\, a_n^n = \Sigma \pm \frac{dF_1}{dp_1}\, \frac{dF_2}{dp_2} .. \frac{dF_n}{dp_n};$$

nadto połóżmy:

$$A_i^\alpha = \frac{dR}{da_i^\alpha}.$$

W skutku tego zamieni się równanie (22) na:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_i^\alpha\, a_k^\beta\, (i, k) = (F_\alpha\,, F_\beta\,).$$

To równanie utrzymuje się nietylko gdy α, β są dwie różne skazówki z szeregu liczb 1, 2, . . , n, ale nadto gdy $\alpha=\beta$, gdyż w ostatnim przypadku jest to równanie tożsamością, obie strony są identycznie równe zeru, jak to bezpośrednio wynika z równania (22b), które jest inną formą powyższego równania.

Pomnóżmy ostatnie równanie przez iloczyn minorów $A_r^\alpha\; A_s^\beta$, gdzie r, s są jakiekolwiek liczby z szeregu 1, 2, . . , n i sumujmy względem α i β od 1 do n, tedy wypadnie:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_r^\alpha\, a_i^\alpha \,.\, A_s^\beta\, a_k^\beta\, (i, k) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_r^\alpha A_s^\beta (F_\alpha, F_\beta),$$

albo gdy położymy dla krótkości:

$$M_{i,\,k} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_r^\alpha\, a_i^\alpha \,.\, A_s^\beta\, a_k^\beta \,. = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} A_r^\alpha\, a_i^\alpha \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_s^\beta\, a_k^\beta\,,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} M_{i,\,k}\, (i, k) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_r^\alpha A_s^\beta\, (F_\alpha\,, F_\beta).$$

Atoli wiadomo z teoryji determinantów, że sumy pojedyncze, których iloczyn nazwaliśmy $M_{i,\,k}$, są równe zeru lub równe deter-

minantowi R według tego czy i różne od r a k różne od s, czy też jednocześnie $i=r$, $k=s$. Zatem:

$$M_{i,k}=0 \quad , \quad M_{r,s}=R^2 .$$

W skutku tego zamienia się ostatnie równanie na:

$$R^2(r,s)=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_r^{\alpha} A_s^{\beta} (F_\alpha , F_\beta),$$

zkąd bezpośrednio wynika, że gdy warunki $(F_\alpha , F_\beta)=0$ są dopełnione, wtedy także będzie identycznie $(r, s)=0$, jeżeli tylko determinant:

$$R=\Sigma \pm \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dF_2}{dp_2} \cdot \cdot \frac{dF_n}{dp_n}$$

nie jest identycznie równy zeru. Ten determinant mógłby być tylko wtedy zerem, gdyby ilości $F_1, F_2, \ldots, F_n$, uważane jako funkcyje ilości $p_1, p_2, \ldots, p_n$, były między sobą zależne, co jednak miejsca mieć nie może, jeżeli z równań (16), (17) dadzą się oznaczyć ilości $p_1, \ldots, p_n$ w funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n$.

Podług tego twierdzenia sprowadza się przeto wynalezienie rozwiązania zupełnego równania (16) do wynalezienia $n-1$ funkcyj $F_2, \ldots, F_n$ ilości $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, które wraz z funkcyją F_1 sprawdzają identycznie $\frac{n(n-1)}{2}$ warunków, przedstawionych przez równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1° i linijowe:

$$(23) \quad (F_\alpha , F_\beta)=\left\{\begin{array}{l} \frac{dF_\alpha}{dp_1}\frac{dF_\beta}{dx_1}+\frac{dF_\alpha}{dp_2}\frac{dF_\beta}{dx_2}+\cdot\cdot+\frac{dF_\alpha}{dp_n}\frac{dF_\beta}{dx_n} \\ -\frac{dF_\alpha}{dx_1}\frac{dF_\beta}{dp_1}-\frac{dF_\alpha}{dx_2}\frac{dF_\beta}{dp_2}-\cdot\cdot-\frac{dF_\alpha}{dx_n}\frac{dF_\beta}{dp_n} \end{array}\right\}=0,$$

Jak z tych warunków należy rachować funkcyje $F_2, \ldots, F_n$, wyłożymy w następującym artykule.

6. Wynajdziemy funkcyje $F_2, \ldots, F_n$ dopełniające warunków (23), gdzie α i β są jakiekolwiek dwie liczby z szeregu $1, 2, \ldots, n$, sposobem następującym.

Najprzód za F_2 weźmiemy jakiekolwiek rozwiązanie równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1° i linijowego:

$$(F_1, F_2) = 0,$$

lub co jedno, jednę z całek układu równań jednoczesnych:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{dF_1}{dp_1} : \frac{dF_1}{dp_2} : \ldots$$
$$\ldots : \frac{dF_1}{dp_n} : -\frac{dF_1}{dx_1} : -\frac{dF_1}{dx_2} : \ldots : -\frac{dF_1}{dx_n}.$$

Następnie weźmiemy za F_3 którekolwiek wspólne rozwiązanie układu dwóch równań o cząstkowych pochodnych rzędu 1° i linijowych:

$$(F_1, F_3) = 0, \qquad (F_2, F_3) = 0;$$

za F_4 wspólne rozwiązanie układu trzech równań:

$$(F_1, F_4) = 0, \ (F_2, F_4) = 0, \ (F_3, F_4) = 0;$$

ogólnie za F_{i+1} wspólne rozwiązanie układu i równań:

$$(24) \qquad (F_1, F_{i+1}), (F_2, F_{i+1}) = 0, \ldots, (F_i, F_{i+1}) = 0.$$

Widzimy przeto, że wynalezienie rozwiązania zupełnego równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1° sprowadza metoda Jacobiego do wynalezienia wspólnych rozwiązań układów równań o cząstkowych pochodnych rzędu 1° i linijowych.

W rozdziale II wyłożyliśmy teoryję takich równań.

Nim zastosujemy metodę ich całkowania do tego przypadku, zbadamy wprzód czy warunki, któreśmy ogólnie oznaczyli przez:

$$B_{i,k}^{(r)} = 0,$$

są dopełnione przy układzie równań (24).

Uważajmy dwa równania:

$$(25) \quad \begin{cases} \Delta_\alpha V = A_{\alpha,1}\dfrac{dV}{dx_1} + A_{\alpha,2}\dfrac{dV}{dx_2} + \ldots + A_{\alpha,n}\dfrac{dV}{dx_n} = 0, \\ \Delta_\beta V = A_{\beta,1}\dfrac{dV}{dx_1} + A_{\beta,2}\dfrac{dV}{dx_2} + \ldots + A_{\beta,n}\dfrac{dV}{dx_n} = 0. \end{cases}$$

Wprowadźmy zamiast n zmiennyh $x_1, \ldots, x_n$ $2n$ zmiennych, z których pierwszemi n niech będą niezależne $x_1, \ldots, x_n$, a pozostałemi n ilości $p_1, \ldots, p_n$, t. j. niech będzie $x_{n+1} = p_1, \ldots, x_{2n} = p_n$; nadto połóżmy dla $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$(26) \quad \begin{cases} A_{\alpha, r} = \dfrac{dF_\alpha}{dp_r}, & A_{\alpha, n+r} = -\dfrac{dF_\alpha}{dx_r}, \\ A_{\beta, r} = \dfrac{dF_\beta}{dp_r}, & A_{\beta, n+r} = -\dfrac{dF_\beta}{dx_r}, \end{cases}$$

tedy równania (25) zamienią się odpowiednio na:

$$(27) \qquad (F_\alpha, V) = 0, \quad (F_\beta, V) = 0;$$

warunki $B_{i,k}^{(r)} = 0$, których w tym przypadku będzie $2n$, przedstawią się pod postacią:

$$B_{\alpha,\beta}^{(r)} = \Delta_\alpha A_{\beta, r} - \Delta_\beta A_{\alpha, r} = \left(F_\alpha, \frac{dF_\beta}{dp_r}\right) - \left(F_\beta, \frac{dF_\alpha}{dp_r}\right) = 0,$$

$$B_{\alpha,\beta}^{(n+r)} = \Delta_\alpha A_{\beta, n+r} - \Delta_\beta A_{\alpha, n+r} = \left(F_\alpha, -\frac{dF_\beta}{dx_r}\right) - \left(F_\beta, -\frac{dF_\alpha}{dx_r}\right) = 0,$$

gdzie $r = 1, 2, \ldots, n$.

Ponieważ ogólnie:

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi) = (\varphi, -\psi),$$

przeto będzie jeszcze:

$$(28) \quad \begin{cases} B_{\alpha.\beta}^{(r)} = \left(F_\alpha, \dfrac{dF_\beta}{dp_r}\right) + \left(\dfrac{dF_\alpha}{dp_r}, F_\beta\right) = \dfrac{d(F_\alpha, F_\beta)}{dp_r} = 0 \\ B_{\alpha,\beta}^{(n+r)} = -\left(F_\alpha, \dfrac{dF_\beta}{dx_r}\right) - \left(\dfrac{dF_\alpha}{dx_r}, F_\beta\right) = -\dfrac{d(F_\alpha, F_\beta)}{dx_r} = 0. \end{cases}$$

Ztąd czytamy, że te warunki są rzeczywiście dopełnione, gdyż z założenia musi być $(F_\alpha, F_\beta) = 0$; — można zatem do równań (24) stosować metodę całkowania Jacobiego, którą wyłożyliśmy w rozdziale II.

Zrobimy to w następnym rozdziale, przyczem postaramy się, aby rachunek, o ile możności, uprościć.

7. Urządzimy tak rachunek, aby szukana funkcyja F_2 nie zależała od p_1, funkcyja F_3 ani od p_1 ani od p_2, w ogóle aby funkcyja F_{i+1} nie zawierała wyraźnie ilości $p_1, p_2, \ldots, p_i$.

I tak, dane równanie różniczkowe $F_1=0$ daje p_1 w funkcyji $x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n$, rozwiązawszy je bowiem względem p_1 otrzymamy:

(a) $$p_1 = \varphi_1 (x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n).$$

Następnie szukać będziemy równania $F_2 = a_2$ między $x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n$; z tego równania oznaczymy:

(b) $$p_2 = \varphi'_2 (x_1, \ldots, x_n, p_3, \ldots, p_n),$$

a gdy tę wartość podstawimy w (a), otrzymamy także:

(c) $$p_1 = \varphi'_1 (x, \ldots, x_n, p_3, \ldots, p_n).$$

To znalazłszy będziemy szukać równania $F_3 = a_3$ między $x_1, \ldots, x_n, p_3, \ldots, p_n$; z tego równania oznaczymy:

(d) $$p_3 = \varphi''_3 (x_1, \ldots, x_n, p_4, \ldots, p_n),$$

a gdy tę wartość podstawimy w (b) (c) otrzymamy także:

(e) $$p_2 = \varphi''_2 (x_1, \ldots, x_n, p_4, \ldots, p_n)$$

(f) $$p_1 = \varphi''_1 (x_1, \ldots, x_n, p_4, \ldots, p_n).$$

Postępując ciągle tym samym sposobem oznaczymy i pierwszych ilości $p_1, p_2, \ldots, p_i$ w funkcyji ilości $x_1, \ldots, x_n, p_{i+1}, \ldots, p_n$; mianowicie znajdziemy:

(g) $$p_1 = \psi_1, \; p_2 = \psi_2, \ldots, p_i = \psi_i,$$

gdzie $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i$ są dane funkcyje ilości $x_1, \ldots, x_n, p_{i+1}, \ldots, p_n$.

Jeżeli następnie $F_{i+1} = a_{i+1}$ jest wyrażenie definiujące p_{i+1} jako funkcyją następnych p i niezależnych $x_1, \ldots, x_n$, tedy funkcyja F_{i+1} winna być wspólnem rozwiązaniem i równań o cząstkowych pochodnych rzędu 1⁰ i linijowych, mianowicie równań, które otrzymamy z jednego:

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0,$$

kładąc: $F_\beta = \psi_\beta - p_\beta$, $F_\alpha = F_{i+1}$,

gdzie: $\beta = 1, 2, .., i$.

Jedném z tych równań będzie przeto:

(h) $(F_{i+1}, \psi_\beta - p_\beta) = 0$,

lub:

$$\frac{dF_{i+1}}{dx_\beta} + \frac{d\psi_\beta}{dx_{i+1}}\frac{dF_{i+1}}{dp_{i+1}} + .. + \frac{d\psi_\beta}{dx_n}\frac{dF_{i+1}}{dp_n}$$
$$- \frac{d\psi_\beta}{dp_{i+1}}\frac{dF_{i+1}}{dx_{i+1}} - .. - \frac{d\psi_\beta}{dp_n}\frac{dF_{i+1}}{dx_n} = 0,$$

albo z powodu, że podług (g) $\psi_\beta = p_\beta$,

$$\text{(k)} \quad \frac{dF_{i+1}}{dx_\beta} + \frac{dp_\beta}{dx_{i+1}}\frac{dF_{i+1}}{dp_{i+1}} + .. + \frac{dp_\beta}{dx_n}\frac{dF_{i+1}}{dp_n}$$
$$- \frac{dp_\beta}{dp_{i+1}}\frac{dF_{i+1}}{dx_{i+1}} - .. - \frac{dp_\beta}{dp_n}\frac{dF_{i+2}}{dx_n} = 0,$$

gdzie $\beta = 1, 2, .., i$.

Wynalazłszy wspólne rozwiązanie tych i równań (k) otrzymamy równanie $F_{i+1} = a_{i+1}$, z którego oznaczymy p_{i+1} w funkcyji $x_1, .., x_n$, $p_{i+2}, .., p_n$; a gdy tę wartość podstawimy w (g), otrzymamy także $p_1, .., p_i$ w funkcyji ilości $x_1, .., x_n$, $p_{i+2}, .., p_n$.

Tak do końca będziemy postępować, aż wszystkie ilości p oznaczymy w funkcyji niezależnych $x_1, .., x_n$.

8. Wskazawszy w ogólnych zarysach sposób postępowania, przystępujemy do właściwego rachunku.

Dane równanie $F_1 = 0$, daje p_1 w funkcyji $p_2, .., p_n$, $x_1, .., x_n$; niech będzie $p_1 = \varphi_1$. Szukamy teraz równania $F_2 = a_2$, które daje p_2 w funkcyji $p_3, .., p_n$, $x_1, .., x_n$. Wyrażenie F_2 jest jakiemkolwiek rozwiązaniem równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1° i linijowego, które otrzymamy z (k) kładąc $\beta = 1$, $i = 1$, mianowicie równania:

$$\text{(A)} \quad \frac{dF_2}{dx_1} + \frac{dp_1}{dx_2}\frac{dF_2}{dp_2} + \frac{dp_1}{dx_3}\frac{dF_2}{dp_3} + .. + \frac{dp_1}{dx_n}\frac{dF_2}{dp_n}$$
$$- \frac{dp_1}{dp_2}\frac{dF_2}{dx_2} - \frac{dp_1}{dp_3}\frac{dF_2}{dx_3} - .. - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{dF_2}{dx_n} = 0,$$

lub, co jedno, jedną z całek układu 2 (n—1) równań Lagrange'a:

$$
(\mathrm{A}')\quad \begin{cases} \dfrac{dp_2}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_2}, \dfrac{dp_3}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_3}, \ldots, \dfrac{dp_n}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_n}, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_2}, \dfrac{dx_3}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_3}, \ldots, \dfrac{dx_n}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_n}, \end{cases}
$$

gdzie $p_1 = \varphi_1$.

Wynalazłszy jednę całkę tego układu równań z jedną dowolną stałą i oznaczywszy z niéj p_2 w funkcyji $p_3, \ldots, p_n$, $x_1, \ldots, x_n$, otrzymamy $p_2 = \varphi_2'$, i następnie $p_1 = \varphi_1'$, gdzie φ_1', φ_2' są dane fnnkcyje ilości $p_3, \ldots, p_n$, $x_1, \ldots, x_n$.

Szukamy następnie równania $F_3 = a_3$ determinującego p_3 jako funkcyją ilości $p_4, \ldots, p_n$, $x_1, \ldots, x_n$; wyrażenie F_3 jest wspólném rozwiązaniem dwóch równań, które otrzymamy z (k) kładąc $\beta = 1, 2, i = 2$, t. j. równań:

$$
(\mathrm{B})\quad \frac{dF_3}{dx_1} + \frac{dp_1}{dx_3}\frac{dF_3}{dp_3} + \ldots + \frac{dp_1}{dx_n}\frac{dF_3}{dp_n} - \frac{dp_1}{dp_3}\frac{dF_3}{dx_3} - \ldots - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{dF_3}{dx_n} = 0,
$$

$$
(\mathrm{C})\quad \frac{dF_3}{dx_2} + \frac{dp_2}{dx_3}\frac{dF_3}{dp_3} + \ldots + \frac{dp_2}{dx_n}\frac{dF_3}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_3}\frac{dF_3}{dx_3} - \ldots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{dF_3}{dx_n} = 0,
$$

gdzie $p_1 = \varphi_1'$, $p_2 = \varphi_2'$.

Aby wynaleźć wspólne rozwiązanie równań (B), (C) szukamy najprzód jakiegokolwiek rozwiązania pierwszego równania lub, co jedno, jednéj z całek układu 2 (n—2) równań Lagrange'a dla równania (B):

$$
(\mathrm{B}')\quad \begin{cases} \dfrac{dp_3}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_3}, \ldots, \dfrac{dp_n}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_n}, \\[2ex] \dfrac{dx_3}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_3}, \ldots, \dfrac{dx_n}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_n}. \end{cases}
$$

Niech będzie $\Phi = \mathrm{const}$ tą całką. Formujemy następnie szereg wyrażeń:

$$(D)\begin{cases}\Phi_1=(\Phi,\varphi'_2-p_2)=\dfrac{d\Phi}{dx_2}+\dfrac{dp_2}{dx_3}\dfrac{d\Phi}{dp_3}+\ldots+\dfrac{dp_2}{dx_n}\dfrac{d\Phi}{dp_n}\\ \qquad\qquad -\dfrac{dp_2}{dp_3}\dfrac{d\Phi}{dx_3}-\ldots-\dfrac{dp_2}{dp_n}\dfrac{d\Phi}{dx_n},\\ \Phi_2=(\Phi_1,\varphi'_2-p_2)=\dfrac{d\Phi_1}{dx_2}+\dfrac{dp_2}{dx_3}\dfrac{d\Phi_1}{dp_3}+\ldots+\dfrac{dp_2}{dx_n}\dfrac{d\Phi_1}{dp_n}\\ \qquad\qquad -\dfrac{dp_2}{dp_3}\dfrac{d\Phi_1}{dx_3}-\ldots-\dfrac{dp_2}{dp_n}\dfrac{d\Phi_1}{dx_n},\end{cases}$$

i t. d.

Podług twierdzenia Poissona (rozdział II art. 6) będą te wyrażenia rozwiązaniami równania (B), a prócz tego będzie także $F_3 = x_2$ rozwiązaniem tego samego równania (B), bo w niém niema żadnych różniczkowań względem x_2. Ponieważ równanie (B) może mieć tylko 2 (n—2) różnych rozwiązań, przeto w szeregu rozwiązań x_2, Φ, Φ_1, Φ_2, .. znajdzie się jedno, które będzie funkcyją wszystkich poprzednich rozwiązań. Niech będzie dopiero:

$$\text{(E)}\qquad \Phi_\mu = \Pi\,(x_2, \Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{\mu-1}).\quad \mu \leqslant 2\,(n-2)$$

Żądane wspólne rozwiązanie równań (B), (C) będzie przeto któremkolwiek rozwiązaniem równania:

$$(x_2, \varphi'_2-p_2)\frac{d\Psi}{dx_2}+(\Phi,\varphi'_2-p_2)\frac{d\Psi}{d\Phi}+(\Phi_1,\varphi'_2-p_2)\frac{d\Psi}{d\Phi_1}+\ldots$$
$$\ldots+\Pi\frac{d\Psi}{d\Phi_{\mu-1}}=0,$$

lub z powodu że $(x_2, \varphi_2'-p_2)=1$ i podług (D):

$$\text{(F)}\quad \frac{d\Psi}{dx_2}+\Phi_1\frac{d\Psi}{d\Phi}+\Phi_2\frac{d\Psi}{d\Phi_1}+\ldots+\Phi_{\mu-1}\frac{d\Psi}{d\Phi_{\mu-2}}+\Pi\frac{d\Psi}{d\Phi_{\mu-1}}=0,$$

albo, co jedno, jedną z całek równań Lagrange'a dla równania (F):

$$\text{(G)}\qquad \frac{d\Phi}{dx_2}=\Phi_1,\ \frac{d\Phi_1}{dx_2}=\Phi_2,\ \ldots,\ \frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx_2}=\Pi,$$

lub nareszcie pierwszą całką równania rzędu μ^0 między dwiema zmiennemi x_2, Φ

$$(\text{H}) \qquad \frac{d^\mu \Phi}{dx_2^\mu} = \Pi\left(x_2, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_2}, \ldots, \frac{d^{\mu-1}\Phi}{dx_2^{\mu-1}}\right).$$

Jeżeli:

$$F_3\left(x_2, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_2}, \ldots, \frac{d^{\mu-1}\Phi}{dx_2^{\mu-1}}\right) = \text{const}$$

jest tą pierwszą całką, natenczas podług (G) będzie:

$$F_3(x_2, \Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{\mu-1}) = a_3$$

będzie wspólném rozwiązaniem równań (B), (C) i zarazem żądaném równaniem determinującém p_3.

Z tego równania otrzymamy $p_3 = \varphi_3''$ i następnie $p_2 = \varphi_2''$, $p_1 = \varphi_1''$, gdzie φ_1'', φ_2'', φ_3'' sa dane funkcyje ilości $p_4, \ldots, p_n$, $x_1, \ldots, x_n$.

Daléj szukamy równania $F_4 = a_4$ między $x_1, \ldots, x_n$, $p_4, \ldots, p_n$; funkcyja F_4 jest wspólném rozwiązaniem trzech równań:

$$(\text{K}) \quad (F_4, \varphi_1'' - p_1) = 0, \ (F_4, \varphi_2'' - p_2) = 0, \ (F_4, \varphi_3'' - p_3) = 0.$$

Gdy $X = \text{const}$ jest jakiemkolwiek rozwiązaniem pierwszego z tych równań lub, co jedno, jedną z całek układu $2(n-3)$ równań Lagrange'a dla tego równania:

$$(\text{K}') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp_4}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_4}, \ldots, \dfrac{dp_n}{dx_1} = \dfrac{dp_1}{dx_n}, \\[2ex] \dfrac{dx_4}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_4}, \ldots, \dfrac{dx_n}{dx_1} = -\dfrac{dp_1}{dp_n}, \end{array} \right.$$

wtedy będą także wyrażenia:

$$X_1 = (X, \varphi_2'' - p_2), \quad X_2 = (X_1, \varphi_2'' - p_2), \ldots$$

rozwiązaniami pierwszego równania (K), nadto będą także x_2, x_3 jego rozwiązaniami, bo w niém nie znajdują się różniczkowania ani względem x_2, ani względem x_3. Jeżeli jest dopiero

$$X_\nu = \Pi'(x_2, x_3, X, X_1, \ldots, X_{\nu-1}), \quad \nu \leqq 2(n-3)$$

wtedy będzie rozwiązanie wspólne dwóch pierwszych równań (K) jakiemkolwiek rozwiązaniem równania:

$$(x_2, \varphi_2''-p_2)\frac{dY}{dx_2}+(x_3, \varphi_2''-p_2)\frac{dY}{dx_3}+(X, \varphi_2''-p_2)\frac{dY}{dX}+\ldots$$
$$\ldots+\Pi'\frac{dY}{dX_{\nu-1}}=0,$$

lub z powodu, że $(x_2, \varphi_2''-p_2)=1$, $(x_3, \varphi_2''-p_2)=0$,

$$\text{(L)}\quad \frac{dY}{dx_2}+X_1\frac{dY}{dX}+X_2\frac{dY}{dX_1}+\ldots+X_{\nu-1}\frac{dY}{dX_{\nu-2}}+\Pi'\frac{dY}{dX_{\nu-1}}=0,$$

albo jedną z całek układu równań Lagrange'a dla tego równania:

$$\text{(M)}\quad \frac{dX}{dx_2}=X_1, \quad \frac{dX_1}{dx_2}=X_2, \ldots, \frac{dX_{\nu-2}}{dx_2}=X_{\nu-1}, \frac{dX_{\nu-1}}{dx_2}=\Pi',$$

albo pierwszą całką równania rzędu ν^0:

$$\text{(N)}\quad \frac{d^\nu X}{dx_2^\nu}=\Pi\left(x_2, x_3, X, \frac{dX}{dx_2}, \ldots, \frac{d^{\nu-1}X}{dx_2^{\nu-1}}\right).$$

Niech będzie:

$$Z\left(x_2, x_3, X, \frac{dX}{dx_2}, \ldots, \frac{d^{\nu-1}X}{dx_2^{\nu-1}}\right)=\text{const}$$

tą pierwszą całką, wtedy

$$Z(x_2, x_3, X, X_1, \ldots, X_{\nu-1})=\text{const}$$

będzie wspólném rozwiązaniem dwóch pierwszych równań (K).

Formujemy następnie wyrażenia:

$$Z_1=(Z, \varphi_3''-p_3) \quad , \quad Z_2=(Z_1, \varphi_3''-p_3), \ldots$$

te wyrażenia będą także wspólnemi rozwiązaniami obu pierwszych równań (K), nadto będzie $F_4=x_3$ ich wspólném rozwiązaniem, gdyż w obu równaniach nie znajduje się różniczkowanie względem x_3.

Jeżeli znowu:

$$Z_\pi=\Pi''(x_3 . Z, Z_1, \ldots, Z_{\pi-1}),$$

gdzie $\pi \leqslant 2(n-3)$, wtedy wspólne rozwiązanie wszystkich trzech równań (K) będzie znowu rozwiązaniem równania linijowego:

$$\text{(P)}\quad \frac{dU}{dx_3}+Z_1\frac{dU}{dZ}+\ldots+Z_{\pi-1}\frac{dU}{dZ_{\pi-2}}+\Pi''\frac{dU}{dZ_{\pi-1}}=0,$$

lub, co jedno, jedną z całek układu równań Lagrange'a:

$$(Q)\quad \frac{dZ}{dx_3}=Z_1\,,\ \frac{dZ_1}{dx_3}=Z_2\,,\ldots,\ \frac{dZ_{\pi-2}}{dx_3}=Z_{\pi-1}\,,\ \frac{dZ_{\pi-1}}{dx_3}=\Pi''\,,$$

albo nareszcie pierwszą całką równania rzędu π^0:

$$(R)\quad \frac{d^\pi Z}{dx_3^\pi}=\Pi'\left(x_3\,,Z\,,\frac{dZ}{dx_3}\,,\ldots,\frac{d^{\pi-1}Z}{dx_3^{\pi-1}}\right).$$

Jeżeli:

$$F_4\left(x_3\,,Z,\frac{dZ}{dx_3}\,,\ldots,\frac{d^{\pi-1}Z}{dx_3^{\pi-1}}\right)=\text{const}$$

jest tą pierwszą całką, wtedy będzie:

$$F_4\,(x_3\,,Z\,,Z_1\,,\ldots,Z_{\pi-1})=a_1\,.$$

żądaném wspólném rozwiązaniem. Z ostatniego równania otrzymamy $p_4=\varphi_4'''$ i następnie znajdziemy $p_3=\varphi_3'''$, $\beta_2=\varphi_2'''$, $p_1=\varphi_1'''$, gdzie φ_1''', φ_2''', φ_3''', φ_4''' są dane funkcyje ilości $p_5,\ldots,p_n$, $x_1,\ldots,x_n$, a nie zależą już wcale od czterech pierwszych ilości p t. j. od p_1, p_2, p_3, p_4.

Tym sposobem do końca będziemy postępować, aż wszystkie ilości p wyrazimy w funkcyji samych niezależnych $x_1,\ldots,x_n$ Otrzymawszy takie wartości podstawimy je w wyrażeniu:

$$dx=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots p_n\,dx_n\,,$$

które całkowane da rozwiązanie zupełne równania $F_1=0$:

$$(S)\quad x=\int(p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n).$$

9. Sprowadzając każdy z układów zwykłych równań (A'), (B'), (K'), .., dla których mamy wynaleźć po jednéj całce do jednego równania rzędu wyższego a zatem odpowiednio rzędu $2\,(n-1)^0$, $2\,(n-2)^0$, $2\,(n-3)^0$, .., możemy powiedzieć, że chcąc wynaleźć zupełne rozwiązanie równania o cząstkowych pochodnych rzędu 1^0 między n zmiennemi niezależnemi niezawierającego wyraźnie zmiennéj zależnéj, potrzeba wynaleźć po pierwszéj całce:

dla 1^0 równania (A'), $2\,(n-1)^0$ rzędu
2-ch równań (B') (H), $2\,(n-2)^0$ rzędu
3-ch równań (K'), (N), (R), $2\,(n-3)^0$ rzędu
. . . .
i równań $2\,(n-i)^0$ rzędu
. . . .
$n-1$ równań . . . 2^0 rzędu.

Tylko w bardzo niekorzystnym razie dojdą wszystkie równania do swych najwyższych rzędów, zwykle i to bardzo rzadko tylko pierwsze w każdéj grupie jest rzędu najwyższego, który téj grupie odpowiada, a rzędy innych równań téj saméj grupy kolejno i to bardzo szybko zniżają się.

Jako przykład uważajmy równanie:

$$\text{(a)} \qquad 2\,p_1\,(p_2 - p_3)^2 - x_4^3\,p_4 = 0.$$

Najprzód mamy:

$$\text{(b)} \qquad p_1 = \frac{x_4^3\,p_4}{2\,(p_2 - p_3)^2},$$

Aby oznaczyć p_2 w funkcyji p_3, p_4 x_1, x_2, x_3, x_4 mamy wynaléźć jednę całkę układu 6 równań:

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \dfrac{dp_2}{dx_1} = 0\,, \quad \dfrac{dp_3}{dx_1} = 0\,, \quad \dfrac{dp_4}{dx_1} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{x_4^2\,p_4}{(p_2-p_3)^2}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{x_4^3\,p_4}{(p_2-p_3)^3}, \quad \dfrac{dx_3}{dx_1} = -\dfrac{x_4^3 p_4}{(p_2-p_3)^3}, \quad \dfrac{dx_4}{dx_1} = -\dfrac{x_4^3}{2(p_2-p_3)^2}. \end{cases}$$

Pierwsze równanie daje:

$$\text{a zatem podług } (b) \qquad \text{(d)} \quad \begin{cases} p_2 = c\,, \\ p_1 = \dfrac{x_4^3\,p_4}{2(c-p_3)^2}. \end{cases}$$

Aby następnie oznaczyć p_3 w funkcyji p_4, x_1, x_2, x_3, x_4, musimy najprzód wynaleźć jednę całkę układu 4-ch równań:

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} \dfrac{dp_3}{dx_1} = 0, \qquad \dfrac{dp_4}{dx_1} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{x_4^2\,p_4}{(c-p_3)^2}, \\ \dfrac{dx_3}{dx_1} = -\dfrac{x_4^3\,p_4}{(c-p_3)^3}, \quad \dfrac{dx_4}{dx_1} = -\dfrac{x_4^3}{2(c-p_3)^2} \end{cases}$$

Pierwsze równanie daje:

$$\text{(f)} \qquad p_3 = c_1,$$

a że wyrażenie symboliczne $(p_3 - c_1,\ p_2 - c) = 0$, przeto ta wartość (f) jest dobrą.

kładąc tę wartość w (d) otrzymamy:

$$\text{(g)} \qquad p_1 = \frac{x_4^3 p_4}{2(c-c_1)^2}, \quad p_2 = c, \quad p_3 = c_1.$$

Aby nareszcie oznaczyć p_4 w funkcyji samych ilości x_1, x_2, x_3, x_4 szukamy najprzód jednéj całki układu dwóch równań:

$$\text{(h)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_4}{dx_1} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{x_4^2\, p_4}{(c-c_1)^2}, \\[2ex] \dfrac{dx_4}{dx_1} = -\dfrac{x_4^3}{2(c-c_1)^2}, \end{cases}$$

Gdy te dwa równania przez siebie podzielimy, tedy wypadnie:

$$\frac{dp_4}{dx_4} = -3\frac{p_4}{x_4},$$

zkąd

$$\text{(k)} \qquad p_4 = \frac{c_2}{x_4^3}.$$

Ponieważ oba symboliczne wyrażenia $\left(p_4 - \dfrac{c_2}{x_4^3},\ p_2 - c\right)$, $\left(p_4 - \dfrac{c_2}{x_4^3},\ p_3 - c_1\right)$ są identycznie zero, przeto ta wartość (k) jest dobrą.

Kładąc wartość (k) w (g) otrzymamy ostatecznie:

$$\text{(l)} \qquad p_1 = \frac{c_2}{2(c-c_1)^2}, \ p_2 = c, \ p_3 = c_1, \ p_4 = \frac{c_2}{x_4^3}.$$

A zatem:

$$x = \int\left(\frac{c_2}{2(c-c_1)^2}\,dx_1 + c\,dx_2 + c_1\,dx_3 + c_2\,\frac{dx_4}{x_4^3}\right).$$

lub:

$$\text{(m)} \qquad x = \frac{c_2\,x_1}{2(c-c_1)^2} + c\,x_2 + c_1\,x_3 - \frac{c_2}{2\,x_4^2} + c_3,$$

będzie żądaném rozwiązaniem zupełném równania (a).

NOTA.

Jeżeli jest danych n funkcyj $u_1, u_2, \ldots u_n$, zależnych od n ilości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, natenczas nazwiemy determinant:

$$(1) \qquad \Delta = \left| \begin{array}{c} \frac{du_1}{dx_1}, \frac{du_1}{dx_2}, \ldots, \frac{du_1}{dx_n} \\ \frac{du_2}{dx_1}, \frac{du_2}{dx_2}, \ldots, \frac{du_2}{dx_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{du_n}{dx_1}, \frac{du_n}{dx_2}, \ldots, \frac{du_n}{dx_n} \end{array} \right|$$

determinantem układu danych funkcyj, lub determinantem funkcyjonalnym funkcyj $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ze względu na ilości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *).

Mamy udowodnić następujące twierdzenie:

„Jeżeli funkcyje $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ilości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie są między sobą niezależne, zatém jeżeli między niemi zachodzi związek identyczny

$$(2) \qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

natenczas determinant (1) tego układu funkcyj będzie identycznie równy zeru t. j.

$$(3) \qquad \Delta = 0,$$

i nawzajem.“

Albowiem różniczkując równanie (2) całkowicie, otrzymamy:

$$\frac{dF}{du_1} du_1 + \frac{dF}{du_2} du_2 + \ldots + \frac{dF}{du_n} du_n = 0.$$

---

*) Jacobi: de determinantibus functionalibus (Crelle J. T. XXII, s. 319).

zkąd wnosimy, że gdy $du_1 = 0, .., du_{n-1} = 0$, wtedy także $du_n = 0$, zatém że gdy:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dx_1} dx_1 + \frac{du_1}{dx_2} dx_2 + .. + \frac{du_1}{dx_n} dx_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \frac{du_{n-1}}{dx_1} dx_1 + \frac{du_{n-1}}{dx_2} dx_2 + .. + \frac{du_{n-1}}{dx_n} dx_n = 0, \end{cases}$$

wtedy także:

$$(5) \qquad \frac{du_n}{dx_1} dx_1 + \frac{du_n}{dx_2} dx_2 + .. + \frac{du_n}{dx_n} dx_n = 0.$$

A zatém n równań (4), (5), linijowych względem dx_1, $dx_2, .., dx_n$, nie będą między sobą niezależnemi, dlatego ich determinant (1) będzie identycznie równy zeru, *c. b. d. o.*

Nawzajem można okazać, że gdy determinant funkcyjonalny (1) jest identycznie równy zeru, natenczas funkcyje $u_1, u_2, .., u_n$ ilości $x_1, x_2, .., x_n$ nie są między sobą niezależne.

Najprzód jest widocznėm, że gdy $n-1$ funkcyj $u_1, u_2, .., n_{n-1}$ są między sobą zależnemi, wtedy także n funkcyj $u_1, u_2, .., u_n$ nie będą między sobą niezależnemi. Załóżmy przeto, że $n-1$ pierwszych funkcyj $u_1, u_2, .., u_{n-1}$ są między sobą niezależnemi. W tym przypadku wyrugujmy z wyrażenia na u_n $n-1$ ilości $x_1, x_2, .., x_{n-1}$ za pomocą wyrażeń na $u_1, u_2, .., u_{n-1}$, w skutku czego będzie u_n wyrażoną jako funkcyja ilości $u_1, u_2, .., u_{n-1}$, x_n, a układ n równań (4), (5), zamieni się na układ równoważny:

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, .., du_{n-1} = 0,$$

$$\frac{du_n}{du_1} du_1 + \frac{du_n}{du_2} du_2 + .. + \frac{du_n}{du_{n-1}} du_{n-1} + \frac{du_n}{dx_n} dx_n = 0.$$

Atoli, z powodu że determinant (1) jest identycznie równy zeru, równania układu (4), (5) lub, co jedno, ostatnie równania nie są między sobą niezależnemi, zatém ostatnie równanie musi być algiebrycznym wynikiem poprzednich, czyli musi być:

$$\frac{du_n}{dx_n} = 0,$$

zkąd wnosimy, że u_n jest funkcyją jedynie ilości $u_1, u_2, .., u_{n-1}$, *c. b. d. o.*

KONIEC.

ZAŁOŻENIA.

1. Pojęcie *granicy* i *ilości nieskończenie małéj* jest podstawą analizy wyższéj.

2. Metoda *transformacyj* jest najodpowiedniejszą zadaniu gieometryji analitycznéj.

3. Sposób formowania lub *geneza* równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych nietylko rzuca światło na naturę całki, ale daje także sposób jéj wynalezienia.